

Universidade Federal Fluminense / Instituto de Computação

Disciplina: Análise e Projeto de Algoritmos (Graduação) Prof. Carlos Martinhon

Programação Dinâmica, *Backtracking* e *Branch-and-Bound* – Lista 3

01 - Considere o problema da mochila, como descrito abaixo:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq M \\ & x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1, \text{ onde } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Nossa estratégia gulosa é considerar (em ordem decrescente) a relação p_i/w_i , adicionando-se nessa ordem os objetos na mochila até enche-la. Mostre utilizando um contra-exemplo que esta estratégia não nos leva necessariamente a uma solução ótima.

02 - Considere o problema da mochila 0/1:

$$\begin{aligned} \max \quad & (5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 3x_5) \\ \text{s. a} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

No **Backward Approach** (Programação Dinâmica) o Princípio de Otimalidade pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} b_j(y) &= \max\{f_{j-1}(y), f_{j-1}(y - p_j) + c_j\} \\ p / \quad & j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Utilizando Programação Dinâmica encontre uma solução ótima para o problema acima.

03 - Considere os problemas a seguir:

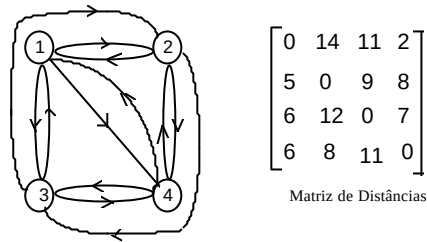
(a)
$$\begin{aligned} \max \quad & (6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 5x_5) \\ \text{s. a} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \max \quad & 12x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 15x_4 + 90x_5 + 26x_6 \\ \text{s. a:} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 13x_6 \leq 33 \\ x_i \in \{0,1\} \quad \text{para } i = 1, \dots, 6 \end{cases} \end{aligned}$$

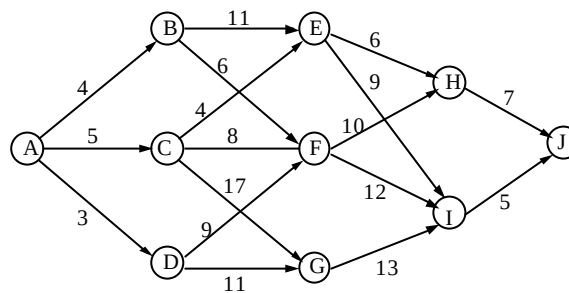
(i) Resolva (a) pelo método *branch-and-bound* fazendo uma busca em profundidade.

(ii) Resolva (b) pelo método *branch-and-bound* fazendo a busca *best-first*.

- 05 - Encontre o circuito hamiltoniano de custo mínimo (caixeiro viajante) utilizando programação dinâmica:



- 06 - Mostre qual o caminho mínimo de A até J via programação dinâmica. Construa a formula de recorrência.



- 07 - Construa um algoritmo do tipo *backtracking* recursivo para o *Problema das n Damas*. Discuta sua complexidade.
- 08 - Seja G um grafo conexo qualquer de n vértices e C um conjunto de m cores distintas. Construa um algoritmo do tipo *backtracking* não-recursivo que gere todas as possíveis colorações dos vértices de G . Discuta a complexidade.
- 09 - Considere um grafo conexo G e uma árvore geradora T qualquer deste grafo. Fixando dois vértices distintos 1 e v de G , construa um algoritmo de complexidade $O(n)$ que determine as arestas presentes no caminho entre os nós 1 e v na árvore T . (**Sugestão:** utilize *Backtracking*).

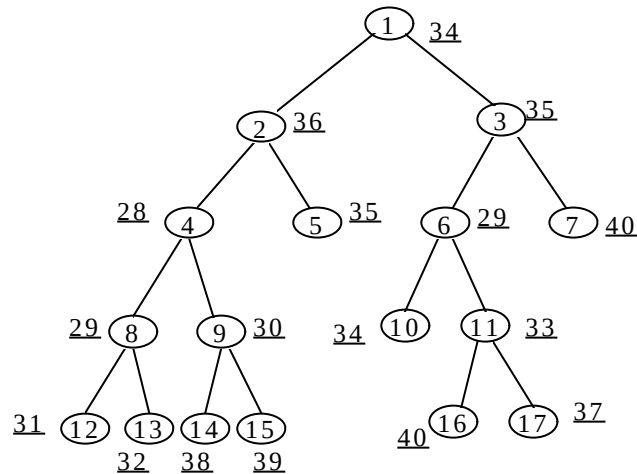
- 10 - Defina uma estratégia gulosa para resolver o seguinte problema:

Uma empresa de mineração deseja otimizar a exploração de uma jazida estratiforme. Esta jazida é formada por um conjunto de n camadas superpostas, todas com a mesma espessura. O conteúdo de uma camada pode ser processado ou não. O custo de escavação da camada i é c_i , onde $i=1, \dots, n$. Se a camada i é processada, vende-se o minério nela contido por p_i , após incorrer em um custo de processamento igual a d_i . Conhece-se ainda a concentração de minério na camada i , que só pode ser processada se sua concentração de minério for superior a um valor mínimo conhecido. Deseja-se determinar quais camadas devem ser escavadas e quais camadas devem ser processadas, de modo a maximizar o lucro da empresa. Modele matematicamente o problema e resolva-o considerando os seguintes dados:

$$n = 6; \quad a_{\min} = 1;$$

$c = (10, 5, 20, 20, 15, 25);$
 $p = (10, 20, 30, 15, 35, 20);$
 $d = (5, 5, 5, 5, 5, 5);$
 $a = (1, 3, 3, 1, 3, 1);$

11 - Considere a seguinte árvore associada a um problema de minimização gerada durante o algoritmo Branch-and-Bound. O limite superior calculado no nó raiz é igual a 46:



- Diga qual a sequência de vértices pesquisados considerando-se a busca em largura, profundidade e *best-first* respectivamente. Os valores ao lado de cada nó representam limites inferiores.
- Suponha que uma busca em largura esteja sendo utilizada. Se o limites inferiores associados aos nós 5 e 10 forem também soluções ótimas diga quais são os nós presentes no conjunto de nós abertos após a pesquisa do nó 17.