

1(3 pontos)- Uma construtora resolveu promover um dos seus mestres de obra por mérito. Assim pediu para eles marcarem os 4 limites de uma construção em um terreno. Eles foram instruídos a localizar esses limites em relação a dois lados do terreno que são ortogonais entre si e dão para as ruas. A tabela abaixo mostra na primeira parte as distâncias que eles deveriam marcar, e nas partes posteriores quanto o engenheiro chefe mediu em relação ao valor marcado por cada um. Qual dos mestres de obra errou menos nas marcações do terreno?

$$D(X_i, X_j) = \left[\sum_{l=1}^n |x_{il} - x_{jl}|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

fórmula genérica do erro absoluto

Depois pediu-se para eles medirem as distâncias entre : (1) o medidor de luz e o limite horizontal do terreno e (2) este limite até a paia. As distancias corretas destes e as que os mestres mediram estão na **segunda tabela**. Como comparar os resultados da segunda tarefa de maneira simples? Qual foi melhor neste teste?

ponto	l=1	l=2	distancias
1	1,10	0,90	correta
2	4,90	0,90	correta
3	1,90	6,50	correta
4	3,80	6,55	correta
1	1,11	0,94	Mestre 1
2	4,92	0,96	Mestre 1
3	1,90	6,57	Mestre 1
4	3,88	6,57	Mestre 1
1	1,09	0,89	Mestre 2
2	4,93	0,88	Mestre 2
3	1,88	6,53	Mestre 2
4	3,82	6,54	Mestre 2
Solução: Valores em modulo dos erros			
pontos	/1	/2	mestre
1	0,01	0,04	1
2	0,02	0,06	1
3	0	0,07	1
4	0,08	0,02	1
Σ	0,11	0,19	0,3
pontos	/ 1	/ 2	mestre
1	0,01	0,01	2
2	0,03	0,02	2
3	0,02	0,03	2
4	0,02	0,01	2
Σ	0,08	0,07	0,15

Para responder a pergunta, i.e. para saber qual mestre errou menos. é preciso Somar todos os erros de cada ponto , considerando alguma métrica ou distancia valida de combinação (Euclidiana, sup., máximo ou infinito, Manhattan ou cityblock, etc.).

É aceito se o aluno simplesmente somar todos os erros (direção 1 e 2) dos 2 mestres. Isso é equivalente a usar a fórmula dada com $r=1$, $n=2$, i sendo o valor correto, e j os valores medido por cada mestre que estão tabelados.

Como as medidas, tem basicamente mesma ordem de grandeza e mesma unidade não é necessário usar valores relativos nesta primeira pergunta, mas sim combinar as direções. Cada aluno por usar outro r, por exemplo 2, ou ∞ (que neste caso corresponde a pegar apenas o maior erro em cada caso). **Mas não é aceito se o aluno afirmar algum mestre sem indicar uma conta que combine** as duas direções ou dimensões deste dado.

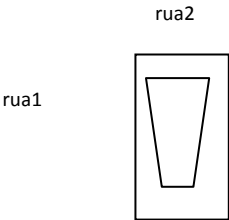
Pelas linhas Σ da tabela e ultima coluna destas se vê que **o Mestre 2 (0,15) errou menos que o Mestre 1 (0,3)**

Erros comuns:

1- O aluno diz que compara ou percebe, mas não fala em subtração para o erro e soma para as direções de cada ponto - Isso anula a parte 1 da questão

2- O aluno apenas usa uma das direções para cada ponto.

Valor deste item desta questão 2 pontos, caso apenas considere só uma direção valor Máximo 0,5 neste item.



segunda tabela:

	correto	M 1	M 2
luz	43 cm	45 cm	40 cm
praia	2,33 km	2,30 km	2,35 km
O erros	absolutos	2 cm	3 cm
erros	absolutos	0,03km	0,02km
/43 cm	relativos	0,046511	0,06976
/2,33km	relativos	0,01287553	0,008583
somatoria	relativos	≈0,0594	≈0,0784

Para comparar os resultados da segunda tarefa deve-se usar a soma dos erros relativos de cada mestre

O melhor neste teste será o que errar menos relativamente a ambas as medidas somadas.

Mestre 1 (0,05) agora foi o melhor, pois errou menos que o Mestre 2 (0,07)

Valor deste item desta questão 1 pontos.

Erros comuns:

1- Erro é sempre resultado de subtração, se o aluno inicio dividindo - **zero** no item, pois não entendeu o fundamento de erro.

2- O aluno respondeu **separadamente para luz e praia**, mesmo se calculando os erros relativos. Isso mostra que não entendeu como combiná-los. **Maximo 0,5 na questão**

2- (4 pontos) Considere que você tem interesse em uma função entre os **limite -2 e 2** e quer uma **aproximação dos zeros** da mesma com o menor número possível de cálculos. Usando a idéia dos **métodos de quebra**, **(1)** como você poderia **instruir a alguém** a ter uma aproximação dos zeros o mais rapidamente possível (sem o uso de IA)?

(2) Para sua resposta não ficar muito teórica faça uma **indicação do "passo a passo"** que faria para função : **$f(x) = x^2 + 0,12x - 1,0989 = 0$** por um deles.

(3) **Monte tabelas** organizadas para isso, e **verifique se suas instruções estão corretas** resolvendo pelo menos umas **4 iterações**. Considere **erro menor que 0,1**.

Resposta:

Item 1- A instrução seria que seguisse esses passos: (1 ponto)

Passo a passo Baseado no **método da Bi secção** por ser o mais intuitivo (foi o utilizado por todos os alunos também)

Passo 0 - Início: obtenha os limites **a, b** e a função dada **F(x)**. **(armazene esses valores durante todo o processo)**

Passo 1- Calcule o valor da função dada , **F(x)**, nos limites do intervalo de interesse , isto é **[a,b] : (F(a), F(b))**

Passo 2- Verifique se **F(a)*F(b) < 0** (ou seja negativo). (Pergunta **F(a)*F(b) < 0** ? Respostas possíveis: **Sim ou Não**)

Se **Não**: pesquisar outro limite entre **[a,b]** dados , e trocar esses até ter uma resposta **Sim**.

Se **Sim**: **2.1** Calcule o **x médio** entre os limites , **x_{med}**, isto é valor de **x_{med} = (a+b)/2**

2.2 Calcule o valor da função dada em x_{med} : $F(x_{med}) = \dots$ (armazene esses valores temporariamente)

2.3 Verifique se $F(a) \cdot F(x_{med}) < 0$? se **Sim** b será trocado por x_{med}

Verifique se $F(b) \cdot F(x_{med}) < 0$? se **Sim** a será trocado por x_{med}

Verifique se $F(x_{med}) < \text{tolerância}$ ou o **erro admissível**?

se **Sim**: Resposta, Raiz = x_{med} , **FIM**

se **Não**: Refaça os passos 2.1, 2.2 e 2.3

No final destes passos (no **FIM**) a raiz seria aproximada na tolerância pedida.

Item 2 - (1 ponto)

Verificando se suas instruções estão corretas para a $[a=-2 ; b=2]$ para a função dada:

$$f(x) = x^2 + 0,12x - 1,0989$$

Como é uma equação do grau 2, pode-se resolver pela fórmula de Bhaskara, onde se tem-se **raízes 0,99 e -1,11**.

Mas isso não é um ponto importante pois o polinômio pode ser de grau maior e não se ter como resolver.

Então o mais eficiente é verificar os passos do item 1 fazendo as contas.

Aqui há **muitas possibilidades** e cada aluno pode fazer de uma forma a verificação de seus passos: (Será seguido o raciocínio do aluno na medida do possível); mas **tabelas são pedidas explicitamente**, logo são cobradas (**Item 3**).

Item 3 - Fazer ate 4 iterações , da busca das 2 raízes possíveis

Uma **possível tabela** para **método da Bisseção** seria a abaixo, dividindo o intervalo cada vez em 2 partes. E iniciando pelo intervalo todo **-2 a 2**. Será considerado convergir se $|f(x)| < 0,1$.

RAIZ positiva (1 ponto)

Iter.	Lim a	Lim b	f(a)	f(b)	x méd.	f(xmed)	Convergiu?	Subs a ou b ?	obs
1	-2	2	2,6611	3,1411	0	-1,0989	não	Pode ser qq um	Subst. a
2	0	2	-1,0989	3,1411	1	0,0211	n	a	
3	1	2	0,0211	3,1411	1,5	-0,8190	n		

Mas pode haver uma forma de resolução para cada aluno, possivelmente

O importante é que: a) de alguma forma verifique o intervalo **todo -2 a 2**, b) sempre compare se convergir, i.e. se $|f(x)| < 0,1$, c) **faça pelo menos 4 iterações (verificando a convergência e os passos que ele mesmo mencionou no item 1)**.

RAIZ negativa (1 ponto)

Iter.	Lim a	Lim b	f(a)	f(b)	x méd.	f(xmed)	Convergiu?	Subs a ou b ?	obs
1	-2	2	2,6611	3,1411	0	-1,0989	não	Pode ser qq um	Subst. b
2	-2	0	2,6611	-1,0989	-1	0,92188	n	a	Subst. a
3	-1	0	-0,2189	3,1411	-0,5	-0,7890	n		

erros comuns: (neste caso a nota será obtida subtraindo-se do 4 cada erro)

1- o aluno não montou tabela se tiver tudo certo, **perde 2 pontos** por não atender esse aspecto do enunciado.

2- O aluno fez tabela corretamente , mas não explicou ate 4 iterações e verificando o erro: **perde 1 pontos**

3- O aluno só considerou uma das raízes, mesmo tudo certo, **perde 1 pontos**

4- Não descreveu "**passo a passo**" como pedido mesmo tudo certo **perde 2 pontos**

5- Não verificou a **convergência com a tolerância** estabelecida ($<0,1$) : **perde 1 pontos**

3- (3 pontos) Sabendo que o Método de Newton-Raphson para resolver equações as substitui por uma função

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

iterativa na forma

Item 1: Resolva por esse método a equação anterior, isto é: $f(x) = x^2 + 0,12x - 1,0989$

Mas agora: (1) Considere a precisão de **2 casas decimais**. Ou seja, um erro **menor que 0,01**. (2) Considere apenas a **raiz positiva** a aproximar melhor.

Item 2: (3) Neste **processo iterativos como você pode explicar** como procurar a solução; e

Item 3: (4) Verifique se sua descrição esta correta **resolvendo com o uso de tabela** que tenham elementos que façam sentido para o método e facilite verificar se houve algum erro.

Resposta possível:

Item 1: **(1 ponto)** função dada: $f(x) = x^2 + 0,12x - 1,0989 = 0$

derivada $f'(x) = 2x + 0,12$

sistema iterativo a resolver: $x_{k+1} = x_k - [(x_k^2 + 0,12x_k - 1,0989) / (2x_k + 0,12)]$

para cada chute inicial de um aluno, x_0 , se ontem um x_1 , Se $|x_1 - x_0| < 0,01$, com esse x_1 , se obtêm um novo valor x_2 , usando: $x_{k+1} = x_k - [(x_k^2 + 0,12x_k - 1,0989) / (2x_k + 0,12)]$

Daqui para frente dependendo do chute inicial cada aluno tem uma solução

Item 3: (1 ponto) A **tabela abaixo** ajuda a verificar os cálculos de cada iteração pelo método

iteração	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$ x_{k+1} - x_k $
0	2	3,141	4,12	1,2376	0,7624
1	1,2376	0,581	2,595	1,0137	0,2239
3	1,0137	0,050	2,147	0,9904	0,0233
4	0,9904	0,001	2,1088	0,9899	0,0005 conv.

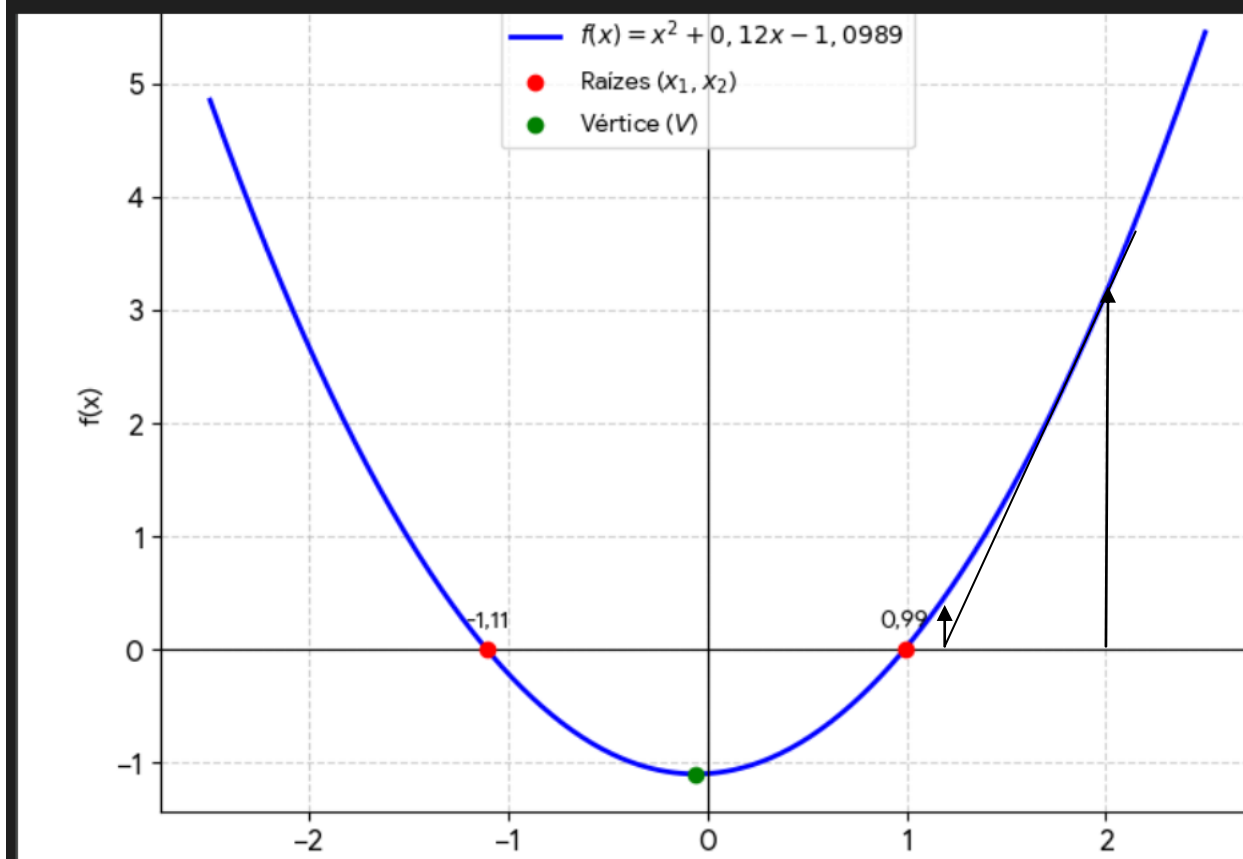
Considerando outro chute inicial e também se o zero da função esta se aproximado (nova coluna) , o uso da **tabela abaixo será mais completa**

iteração	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$ x_{k+1} - x_k < 0,01$	$ f(x_{k+1}) < 0,01$
0	1,5	1,331	3,12	1,0734	0,0834 não	não
1	1,0734	0,18209	2,27668	0,9931	0,0031 sim	não
2	0,993	0,006	2,11	0,990	sim	sim

Explicação da procura da solução: **Item 2: (1 ponto)** A rapidez da convergência pelo método se explica por ele usar a própria tangente da função para se aproximar do zero, que o chute inicial pode levar.

A função dada é a parábola abaixo, com concavidade para cima, **vértice no ponto (-0,06; -1,1025)** e as **raízes** mostradas no gráfico. A idéia do método se explica no esquema abaixo, onde a partir de cada chute positivo, no caso se mostra o $x_0=2$, se procura a tangente a parábola neste ponto (linha vertical), ao achar essa tangente , ou seja no ponto onde alinha vertical toca a tangente à parábola, como mostrado, se volta para o eixo horizontal considerado essa direção, a tangente a função. Isso define o novo ponto x_1 , da iteração. Ou seja o x_k da iteração seguinte será obtido quando a tangente a curva em x_{k-1} encontra a horizontal, repedindo assim o processo, que se aproxima com a maior rapidez possível da raiz. Esse método tem **ordem de convergência 2**.

 grafico de $f(x) = x^2 + 0,12x - 1,0989 = 0?$



Nesta questão não foi pedido passo a passo. Se fosse esses seriam:

Passo 1 - Calcular a forma analítica da derivada da $F(x)$ dada *(programar essa expressão)*

Passo 2 - Definir um "chute" para a raiz x_k

Passo 3 - Calcular o elementos do Método de Newton-Raphson para x_k : $f(x_k)$, $f'(x_k)$

Passo 4 - Calcular o valor seguinte de x_{k+1} : $x_k - f(x_k) / f'(x_k)$

Passo 5 ' Armazenar x_{k+1}

Passo 6 - Perguntar $|x_{k+1} - x_k| < \text{erro tolerado}$, se Sim então x_{k+1} = solução e fim do processo

Passo 7 - se Não então Perguntar se está convergindo, ou seja se $|x_{k+1} - x_k| < |x_k - x_{k-1}|$?

Passo 8 se Não então: escreva a mensagem:" tente outro chute " e fim do processo

Passo 9 se Sim então: $x_k = x_{k+1}$

Passo 10 Repita os Passos 3 a 6 .

Erros mais comuns:

- Aluno respondeu aqui o passo a passo que era pedido na questão 2 para os métodos de quebra. Isso não vale nada na nota desta questão

- Não explicou que a busca da solução do método se baseia na tangente da própria curva, nem fez gráfico para mostrar isso. ou seja esqueceu de responder o item 2. **(esse item vale 1 ponto)**

- Não usou tabelas **(-0,5 ponto)**

- Não verifica a convergência em seus cálculos (não fazer esse item **-0,5 ponto**) isto é não viu se :

$ x_{k+1} - x_k < 0,01$	$ f(x_{k+1}) < 0,01$
--------------------------	-----------------------