

P2 - 2025 / 2 Aluno: _____ matrícula: _____

1- **(4,0)** Sabendo que: (1.1) - Se for desejado calcular a integral pelo **Método de Simpson** entre os limites **a** e **b**, **[a,b]**, particionado em **2n** intervalos de tamanho **h**, essa integral será aproximada pelo somatório de:

$$\frac{h}{3} \{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\}$$

onde os índices **0,1,2,3,...,2n** ajudam a definir os limites usados no método para esse somatório e correspondem aos valores dos pares $(x_0=a, y_0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., $(x_{2n}=b, y_{2n})$, sendo cada $y_i=f(x_i)$

(1.2)- O LIMITE SUPERIOOR do **erro** pelo Método de Simpson é dado por:

$$|E_S| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M_4 \quad M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

onde $f^{(4)}$ é a derivada quarta de $f(x)$.

(1.3)- Se for desejado aproximar a integral de $f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$ de -1 até 9 **com precisão de 10** (isto é algo que **pode nunca ocorrer na realidade**, mas é apenas para nesta prova não se fazer muitas contas).;

Pede-se: **(1.a)** Uma **explicação**, com suas palavras de como você poderia, usando as equações do item (1.2) ter uma aproximação de número de partes que deve dividir o intervalo de -1 a 9.

(1.b) Considerando esse Número de partes (divisões), aproxime a integral pelo **Método de Simpson**.

(1.c) Calcule o **erro obtido com esse número de divisões pelo Método de Simpson** (i.e. em relação a **integral definida correta** deste polinômio).

AVALIAÇÃO: Resolvendo (1.a) da questão: O aluno ganha 1,5 pontos : 0,5 pela explicação com suas palavras e 1,0 pelo calculo correto do numero de partes. Esse segue abaixo.

Primeiro vamos ver qual seria o limite superior do erro do método para essa função : $f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$.

Considerando a expressão do **limite Máximo** erro fornecida no enunciado, em especial que esta precisa de M_4 . Calculamos as derivadas, e assim chegamos que a derivada quarta de $f(x)$ é $f^{iv}(x) = 5.4.3.2 x = 120x$

Essa tem o gráfico de uma reta. Considerando a região de interesse de -1 a 9 **tem-se** que o máximo é no extremo $(x) = 9 \Rightarrow$ **avaliando a reta neste ponto:** $f^{iv}(9) = 9.5.4.3.2 = 1080$,

Como M_4 é igual a esse Máximo, $M_4 = f^{iv}(9) = 9.5.4.3.2 = 1080$

Agora vamos ao **número de intervalos** para o erro Máximo admissível. Neste método ele deve ser calculado por algumas iterações dos critérios do mesmo. Inicialmente **usando a igualdade** ao invés da desigualdade na equação dada de E_s i.e. no item (1.2) à esquerda, acima, tem-se para $E_s = 10 = (10^1)$,

$$10 \leq \frac{h^4(9-(-1)) M_4}{180} = \frac{h^4(10)(9.5.4.3.2)}{180} \text{ simplificando}$$

$$10 = (60)h^4 \text{ logo:}$$

$$h^4 = 1/6 \Rightarrow h = 0,6389431042462$$

considerando que $h = (b-a)/2n$ se n fosse um numero real se teria $2n = 10/h = 15,65$, **mas 2n deve ser inteiro e par**, logo se escolhe $2n = 16$ e $h = 9-(-1) / 16 = 10/16 = 0,625$

Aproximação da integral pelo Método de Simpson .

AVALIAÇÃO: Vale mais 1,5 - O aluno montando uma tabela com os x_i e $f(x_i)$ já ganha 0,5 ,

Mais **0,5** por atribuir as multiplicações pelo peso corretamente.

Os últimos **0,5** deste item, pelo **cálculo correto do somatório** . Essa separação é para ajudar os alunos que não finalizaram terem alguma nota neste item.

Solução da parte **(1.b)** Considerando 16 divisões e dada inicialmente avaliando $f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$ nos pontos tabelados abaixo onde $x_i - x_{i-1} = 0,625$

i	x_i	$f(x_i) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$	Peso w_i	$f(x_i) w_i$
0	-1	-7	1	-7
1	-0,375	-1,877	4	-7,50623
2	0,25	0,797852	2	1,595703
3	0,875	1,046112	4	4,184448
4	1,5	3,46875	2	6,9375
5	2,125	28,68802	4	114,7521
6	2,75	124,792	2	249,584
7	3,375	378,7787	4	1515,115
8	4	928	2	1856
9	4,625	1971,606	4	7886,424
10	5,25	3781,989	2	7563,979
11	5,875	6716,228	4	26864,91
12	6,5	11227,53	2	22455,06
13	7,125	17876,68	4	71506,73
14	7,75	27343,48	2	54686,97
15	8,375	40438,2	4	161752,8
16	9	58113	1	58113
Tabela 1			Σ	414563,5

Multiplicando por $h/3 = 0,625/3 = 0,208333$ tem-se $414563,5 \times 0,208333 = 86367,4$ ou $86.367,4$

OBSERVAÇÃO: Como obviamente com **h menores**, o erro deve ser ainda menor, se aceita **h mais simples** de calcular **x** e outros **$2n$, como por exemplo 20 (que é par)** e pode ser usado no **Método de Simpson** fornecendo um **$h=10/20=0,5$**

A Solução da parte **(1.b)** Considerando 20 divisões, uma aproximação da integral pelo **Método de Simpson** será dada depois das avaliações dos diversos valores de x_i para esse incremento de $x_0 = -1$ a $x_{2n} = 9$ de $f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$ (terceira coluna da tabela seguinte)

i	x	$f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$	Peso w_i	$f(x) w$
0	-1	-7	1	
1	-0,5	-2,65625	4	
2	0	0	2	
3	0,5	1,15625	4	
4	1	1	2	
5	1.5	3,4687	4	
6	2	20	2	
7	2.5		4	
8	3		2	
9	3.5		4	
10	4	928	2	
11	4.5		4	
12	5	2945	2	
13	5.5		4	
14	6		2	
15	6.5		4	
16	7		2	
17	7.5		4	
18	8		2	
19	8,5		4	
20	9	58113	1	
Tabela 2			soma	

(1.c) AVALIAÇÃO: Vale mais 1,0 -

Erro obtido com o número de divisões usado pelo Método de Simpson

Analicamente essa $f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$ **tem integral**

$$F(x) = (1/6)x^6 - (1/4)x^4 - x^3 + 2x^2$$

Substituído os limites $b=9$ e $a=-1$

A integral fica **86363,67 (Aluno recebe 0,5 pela integral correta)**

Enquanto que por Simpson para as 16 divisões tem-se: 86367,4

Logo o erro de cada aluno será o modulo da diferença entre o somatório de SIMPSON e o valor acima :

Para as 16 divisões tem-se: $|86367,4 - 86363,67| = |-3,72583| = 3,72583$ **(Aluno recebe 0,5 pelo erro correto)**

2- (3,0) Considerando o polinômio interpolador de Lagrange e a ordem da função inicial a ser integrada na equação anterior. **(2.a) Diga quantos pontos você precisaria ter usado para aproximá-la por um polinômio de mesmo grau. (2.b) Escolha** (na sua tabela da questão anterior) esse número de pontos e essas avaliações já feitas de $f(x)$ para

aproximar a função da questão 1 por Lagrange. (2.c) Escolha **2 outros pontos quaisquer** da sua tabela, e calcule o erro dentre esses pontos aproximados por Lagrange e os originais usando a função ***f(x) dada*** . **Qual o erro médio obtido** na aproximação considerando esses pontos?.

A **$f(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$** é do grau 5, logo precisa de 6 pontos para ser interpolada por Lagrange.

Quaisquer **6 pontos já avaliados na questão 1** podem ser escolhidos para serem usados a montagem do polinômio.

Mas para fazer uma interpolação os pontos devem estar no interior **do intervalo de interesse** e o cobrir de forma **mais igualmente espaçada possível** para não ter oscilações desnecessários e diminuir o efeito de Runge.

Assim os pontos distantes de 1,25 (valores pares na tabela anterior) seriam uma boa escolha. Eles foram deixados em amarelo na tabela que segue.

i	x_i	$f(x_i) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$
0	-1	-7
1	0,25	0,797852
2	1,5	3,46875
3	2,75	124,792
4	4	928
5	5,25	3781,989
6	6,5	11227,53
7	7,75	27343,48
8	9	58113

Tabela 3

Mas desta forma a tabela ficou com **9 pontos e interpolara um polinômio de grau $n=8$** .

Para se ter um polinômio do **grau $n=5$** teriam que **sair ainda 3 pontos**. Para nada mais ser calculado, e se aproveitar os cálculos da questão 1, **quaisquer 3** dos valores tabelados em **verde podem ser eliminados**.

No entanto como os valores crescem com x , **o mais adequado** seria deixar **os valores maiores**, por exemplo $x=7,75$

Agora se avalia

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

Depois se avalia os **$L_i(x)$** , trocando na expressão dada o **0 por cada um dos i** , e usando os índices adequadamente até **$n=5$** , ou seja deve-se substituir os x_i das tabelas por

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_5)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_5)} \quad L_3$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_5)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_5)} \quad L_4'$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_5)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_5)} \quad \dots \quad L_5$$

incluindo-se os valores dos (x_i) escolhidos pelos alunos, se tem cada um dos $L_i(x)$, $i=0,1,2,3,4,5$

cada um deles um **polinômio de grau 5** em x , pois x aparece em todos os 5 monômios do numerador de cada um .

Usando agora cada um dos $y_i=f(x_i)$, correspondentes aos x_i da tabela usada pelo aluno.

Obtém-se o $p(x) = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4 + y_5 L_5$ que depois de simplificações será, a menos de erros de arredondamento igual a função da questão 1 .

Também para quaisquer 2 outros pontos (x_i) da "sua tabela" que o aluno escolher o erro dentre esses pontos aproximados por Lagrange e os originais usando a função $f(x_i) = y_i$ **deve ser zero** ou muito próximos, de modo que a média obtida também deve ser zero ou isso com alguma aproximação.

Ainda valores **muito quebrados darão mais trabalho ao digitar os números**. Assim , se fossem escolhidos os números avaliados com **20 pontos** as contas ficariam mais fáceis. Ou alternativamente se escolhidos alguns **menos quebrados como os indicados na tabela abaixo, obtidos eliminando algumas linhas da anterior**.

i	x_i	$f(x_i) = x^5 - x^3 - 3x^2 + 4x$
0	-1	-7
1	0,25	0,797852
2	1,5	3,46875
3	2,75	124,792
4	4	928
5	5,25	3781,989
6	9	58113

tabela 4

nesta tabela a **distancia entre os pontos é 1,25 , até o $i=5$, mas depois tem uma distancia de $9-5,25=3,75$. Também foram usados 7 pontos**, o que fará o **polinômio ser do grau 7**. Melhor usar exatamente o **grau do polinômio a ser aproximado**, quando esse for conhecido. Para evitar **efeitos de Runge**.

Então essa escolha **não é boa**.

Continuando a solução, depois de calcular 5 L_i , o aluno usa os $f(x_i) = y_i$ correspondentes para montar o polinômio aproximado do dado por Lagrange. Usando:

$$p(x) = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4 + y_5 L_5$$

Para acabar de responder o item (2.c), deve escolher **2 outros pontos quaisquer** da sua tabela, e calcular o erro dentre esses pontos aproximados por Lagrange e os originais usando a função $f(x)$. **O o erro médio obtido** na aproximação será a media entre eles (Se o grau do polinômio foi usado corretamente, isso é se foi usado $n=5$, espera-se que a menos de erros de aproximação esse seja zero!) .

Critério de avaliação- O aluno deve fazer todas as etapas, ou Explicar o porque da solução apresentada.

Cada erro ou falta de explicação tem menos 0,5

3- **(3,0)** Considere o sistema de equações formado pela reta $y=x+1$ e pela parábola $y=4x^2$. **(3.a)** Através da atribuição de alguns pontos destas equações, faça um esboço das duas no mesmo sistema de eixos (X,Y) .

Depois diga: **(3,b)** Como seriam os passos da busca pelos pontos de interseção entre a reta e a parábola pelo método de **Newton-Raphson**. (Como a solução é muito dependente do ponto inicial do sistema iterativo responda, fazendo pelo menos algumas iterações) **(3.c)** o sistema não linear converge para uma das raízes se o “chute” for $x=y=1/2$? E se for **(3.d)** $x=y=0$?

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Para isso vale lembrar que:

(3.1) a aplicação do método de Newton-Raphson em sistemas de equações é uma generalização do método para

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

uma equação que pode ser escrito como:

desde que seja lembrado que o Jaconiano (as

derivadas parciais das funções) substitui f' na equação acima.

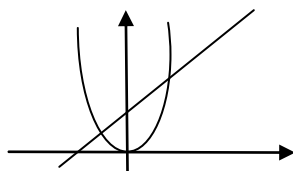
Solução- (3.a) Pontos da reta: $y=x+1$

x	-1	0	1		
y	0	1	2		

Pontos da parábola $y=4x^2$

x	-1	0	1		
y	4	0	4		

esboço



Para esse sistema, até é simples se obter a solução. Igualando expressões em y:

$x+1 = 4x^2$ ou $4x^2 - x - 1 = 0$ ou pela fórmula de Bhaskara, a solução será: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$ ou seja:
 $x = 1/8(1 + 4,123)$ ou $x = 1/8(1 - 4,123) \Rightarrow$ **$x_1 \approx 0,64$ ou $x_2 \approx -0,3904$**

Com esses valores de x os y são: $\Rightarrow$ para $x_1 \approx 0,64$, **$y_1 = x_1 + 1 = 1,64$** ou **$y_1 = 4x_1^2 = 4(0,64)^2 = 1,64$**

$x_2 \approx -0,3904$ tem-se $y_2 \approx 1 - 0,3904 = 0,61$ e $y_2 \approx 4x_2^2 = 4(-0,3904)^2 = 0,6096 \approx 0,61$

Assim **as interseções analíticas são em: (0,64 ; 1,64) e (-0,39 ; 0,61)**

Avaliação no item (3.a) apenas fornecer alguns pontos e fazer o esboço o aluno **recebe 0,5**

Solução- (3.b)

(3,b) Numericamente os **passos da busca pelos pontos de interseção** faz:

1- montar o sistema de equações dadas como Implícito $F(x) = \begin{cases} y - 4x^2 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$

2- calcular o Jacobiano $J(x, y) =$

-8x	1
-1	1

A inversa deste Jacobiano, pelas expressões dadas na prova será (essa inversão é obtativa, o aluno pode resolver por incremento dos x sem inverter a matriz):

$$\det(J) = 1 - 8x \quad 1/\det(J) \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -8x \\ \hline \end{array}$$

3- Montar o sistema iterativo para cada (x_i, y_i) .

4- Solucionar o sistema. Aqui o aluno pode **inverter o Jacobiano**, isto é calcular $(J(x_i, y_i))^{-1}$ ou usar a fórmula com ele para o outro lado da equação multiplicada pelo incremento em $(x_i, y_i) = \Delta$:

$J(x_0)\Delta = -F(x_0)$ $\Rightarrow$ a partir dos chutes iniciais sugeridos até o valor do Vetor incremento Δ ser muito pequeno, ou a te que a diferença entre os $(x_i) = (x_i, y_i)$ ser muito pequena. ou seja $(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1}) \leq \text{tolerância}$

Avaliação no item (3.b). Depende de como o aluno explicou e quanto completo foi, **ganha mais 0,5 na questão**

Solução- (3.c)

Avaliação no item (3.c). Como foi pedido na questão algumas iterações para os valores iniciais se espera que os **alunos considerem ambos os chutes sugeridos cada 1 valendo (1.0):**

Para os $x_0 = (1/2 ; 1/2)$,

Jacobiano avaliado em (x_0) fica e $F(x_0)$ fica

-4	1	-1/2
-1	1	-1

O aluno pode inverter o $J(x_0)$, que resulta na matriz $J^{-1}(x_0)$, ou usar a fórmula com ele para o outro lado da equação.

A inversa desta matriz quando $x=y=1/2$ é

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -4/3 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

apresentada acima. E neste caso o próximo x_1 fica

$$x_1 = x_0 + J^{-1}(x_0) F(x_0)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1/2 & & 1/3 & -1/3 & & -1/2 & & 1/2 & & 1/6 & = & 4/6=0,67 \\ \hline 1/2 & + & 1/3 & -4/3 & * & -1 & = & 1/2 & + & 7/6 & = & 10/6=1,67 \end{array}$$

parece se aproximar da raiz analítica **(0,64 ; 1,64)**, isso é de **(0,5 ; 0,5)** foi para **(0,67 ; 1,67)**

Fazendo mais uma iteração: $x_2 = x_1 + J^{-1}(x_1) F(x_1)$ $\det(J) = 1-8x = -13/3$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 4/6 & & 1 & -1 & & -1/9 & & 4/6 & & 8/9 & & 0,64 \\ \hline 10/6 & -3/13 & 1 & -16/3 & * & -1 & = & 10/6 & -3/13 & 47/9 & = & 1,64 \end{array}$$

Já para o que não inverteram. A formula sem inverter resulta em:

$$J(x_0)\Delta = -F(x_0) \Rightarrow \Delta y - \Delta x = -1$$

$$4\Delta y - \Delta x = -1/2$$

resolvendo o sistema acima se tem $\Delta x = 7/6$ e $\Delta y = 1/6$

(Substituindo (4) em (3)) $\Delta z + 8\Delta z = -1 \Rightarrow 9\Delta z = -1 \Rightarrow \Delta z = -1/9 \Rightarrow$ em (4) $\Delta y = -1/18$

$$-2\Delta x + 4\Delta y = 1 \Rightarrow -\Delta x - 2 \cdot 1/18 = 1/2 \Rightarrow \Delta x = -1/2 - 1/9 = (-9-2)/18 = -11/18 = -0,611111$$

$$\text{Vetor incremento } \Delta = [-11/18 \quad -1/18 \quad -1/9]^T$$

$$\text{Ou } \Delta = [-6,1111 \quad -0,0555 \quad -0,1111]^T$$

Solução- (3.d)

Avaliação no item (3.d). Como foi pedido na questão algumas iterações para os valores iniciais se espera que os alunos considerem para o chute sugerido pelo menos 2 iterações . A questão vale **(1.0)**:

Para os $x_0 = (0 ; 0)$,

Jacobiano avaliado em (x_0) fica e $F(x_0)$ fica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right.$$

A inversa desta matriz quando $x=y=0$ e' $\det(J) = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

E neste caso o próximo x_1 fica : $x_1 = x_0 + J^{-1}(x_0) F(x_0)$

0		1	-1		0		0		1	=	1
0	+	1	0	*	-1	=	0	+	0	=	0

e não parece estar se aproximando de nenhuma das raízes. **(0,64 ; 1,64) e (-0,39 ; 0,61).**

Mas continuando:

Para os $x_1 = (1 ; 0)$,

Jacobiano avaliado em (x_1) fica e $F(x_1)$ fica

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -8 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline -4 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array} \right.$$

A inversa desta matriz quando $x=1$ $y=0$ e' $\det(J) = 1$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & -8 \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right.$$

E neste caso o próximo x_1 fica : $x_2 = x_1 + J^{-1}(x_1) F(x_1)$

1		1	-1		-4		-2		1	=	-1
0	+	1	-8	*	-2	=	12	+	0	=	12

está divergindo!!

Já para o que não inverteram. Para os $x_0 = (0 ; 0)$,

A formula sem inverter resulta em:

$$J(x_0)\Delta = -F(x_0) \Rightarrow \Delta y - \Delta x = 0$$

$$\Delta y + 8\Delta x = -4$$

resolvendo o sistema acima se tem $\Delta x = \Delta y = 4/9$

(Substituindo em $(0; 0)$) $\Rightarrow 4/9 ; 4/9 \Rightarrow 0,4444 ; 0,4444$

não é possível dizer se esta se aproximando de uma das raízes **(0,64 ; 1,64) e (-0,39 ; sem fazer mais uma iteração**

Critério de avaliação da questão 3 - soma-se todos os pontos obtidos pelo aluno