Teoria dos Grafos

Loana T. Nogueira

Aula 5

Conectividade: $\kappa(G)$

- Menor numero de vertices necessarios para desconectar G
- Se G eh completo, definimos $\kappa(G)=n-1$
- Se G eh trivial ou desconexo $\kappa(G)=0$

G eh dito k-conexo se $\kappa(G)\geq k$

Qualquer grafo conexo eh 1-conexo

Conectividade por arestas: $\kappa'(G)$

- Tamanho do menor corte de um grafo
- Se G eh trivial ou desconexo, $\kappa'(G)=0$
- G eh dito conexo por k arestas ou k-conexo por arestas se $\kappa'(G) \geq k$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Teorema: $\kappa \le \kappa' \le \delta$

- Se G é trivial, $\kappa' = 0 \le \delta$.

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Se G é trivial, $\kappa'=0 \leq \delta$.
- Caso contrario, o conjunto de links indicentes ao vertice de grau δ constitui um corte de δ arestas de G

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Se G é trivial, $\kappa'=0 \leq \delta$.
- Caso contrario, o conjunto de links indicentes ao vertice de grau δ constitui um corte de δ arestas de G

  - $\kappa'=0 \leq \delta$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Provamos $\kappa \leq \kappa'$ por inducao em κ'

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Provamos $\kappa \leq \kappa'$ por inducao em κ'
- Se $\kappa'=0$, o resultado e verdadeiro, ja que neste caso G eh trivial ou desconexo

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Provamos $\kappa \leq \kappa'$ por inducao em κ'
- Se $\kappa'=0$, o resultado e verdadeiro, ja que neste caso G eh trivial ou desconexo
- Suponha que o resultado seja verdadeiro para conectividade por aresta menor do que k

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Provamos $\kappa \leq \kappa'$ por inducao em κ'
- Se $\kappa'=0$, o resultado e verdadeiro, ja que neste caso G eh trivial ou desconexo
- Suponha que o resultado seja verdadeiro para conectividade por aresta menor do que k
- Seja G um grafo com $\kappa'(G) = k > 0$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Provamos $\kappa \leq \kappa'$ por inducao em κ'
- Se $\kappa'=0$, o resultado e verdadeiro, ja que neste caso G eh trivial ou desconexo
- Suponha que o resultado seja verdadeiro para conectividade por aresta menor do que k
- Seja G um grafo com $\kappa'(G) = k > 0$
- Seja e uma aresta no corte por k arestas

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Faca, H=G-e
  - $\kappa'(H)=k-1$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Faca, H=G-e
  - $\kappa'(H)=k-1$

$\kappa(H) \leq k-1$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Se H contem um grafo completo como subgrafo gerador

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Se H contem um grafo completo como subgrafo gerador

G tambem contem

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

- Se H contem um grafo completo como subgrafo gerador

G tambem contem

$$\kappa(G) = \kappa(H) \leq k\text{-}1$$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Caso contrario…

- S: corte por vertice de H com $\kappa(H)$ elementos

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Caso contrario…

- S: corte por vertice de H com κ(H) elementos
- Como H-S eh desconexo,
  - G-S eh desconexo
  - G-S eh conexo

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Caso contrario…

- S: corte por vertice de H com $\kappa(H)$ elementos
- Como H-S eh desconexo,
  - G-S eh desconexo: $\kappa(G) \leq \kappa(H) \leq k-1$
  - G-S eh conexo

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Caso contrario…

- S: corte por vertice de H com $\kappa(H)$ elementos
- Como H-S eh desconexo,
  - G-S eh desconexo
  - G-S eh conexo

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

Caso contrario…

- S: corte por vertice de H com $\kappa(H)$ elementos
- Como H-S eh desconexo,
  - G-S eh desconexo
  - G-S eh conexo

e eh uma aresta de corte de G-S

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

G-S eh conexo e e eh uma ponte:

- $n(G\text{-}S)=2$

$\kappa(G) \leq n(G)\text{-}1 = \kappa(H)+1 \leq k$

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

G-S eh conexo e e eh uma ponte:

- n(G-S)=2

$$\kappa(G) \leq n(G)\text{-}1 = \kappa(H)+1 \leq k$$

- G-S tem um corte de 1 vertice {v}, implicando que S ∪{v} eh um corte de G

Teorema: $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

G-S eh conexo e e eh uma ponte:

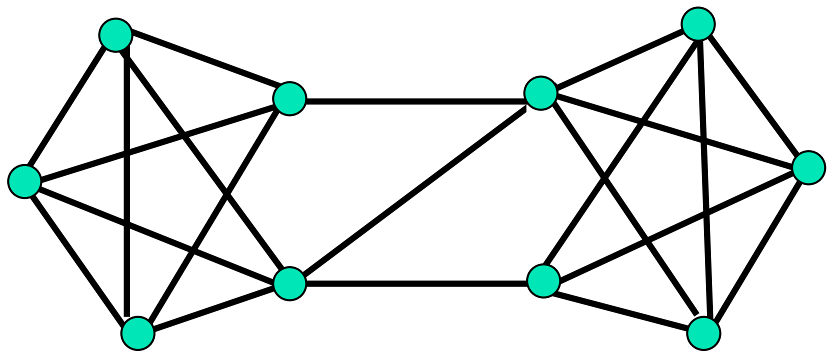
- n(G-S)=2

$$\kappa(G) \leq n(G)-1 = \kappa(H)+1 \leq k$$

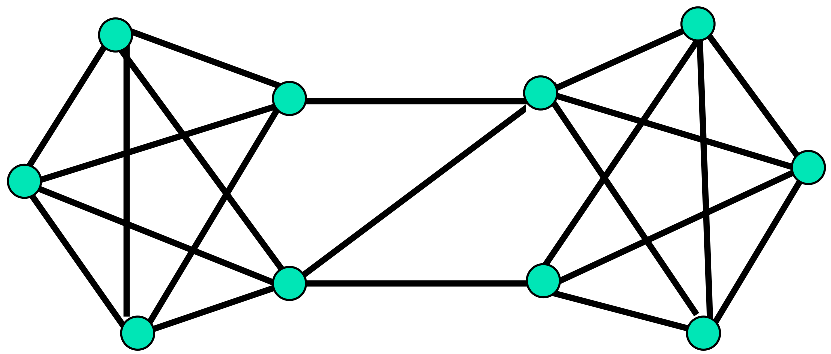
- G-S tem um corte de 1 vertice {v}, implicando que S $\cup$ {v} eh um corte de G

$$\boxed{\kappa(G) \leq \kappa(H)+1 \leq} \; k$$

Exemplo:

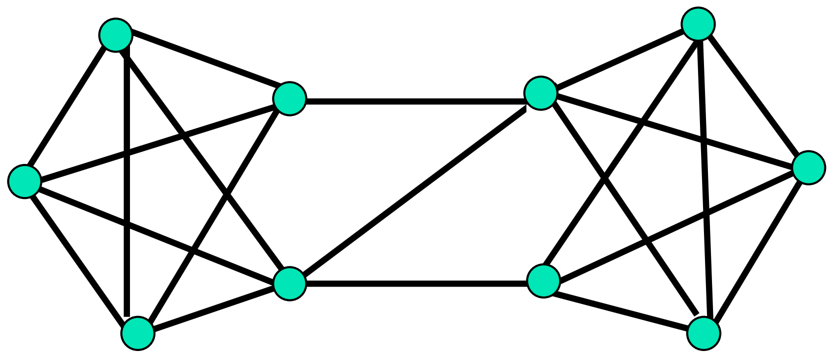


Exemplo:



$\delta=4$

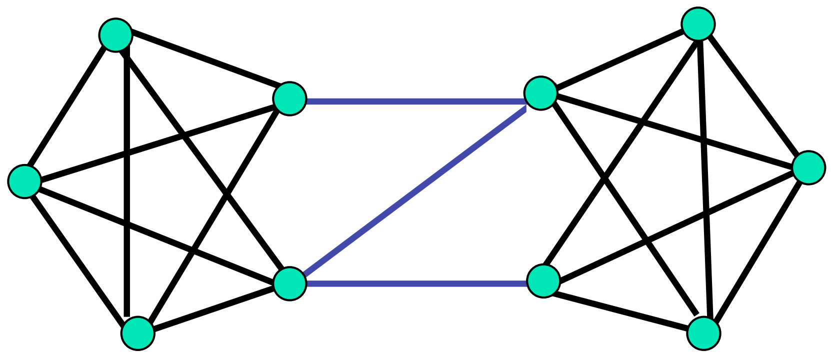
Exemplo:



$\delta=4$

$\kappa'=3$

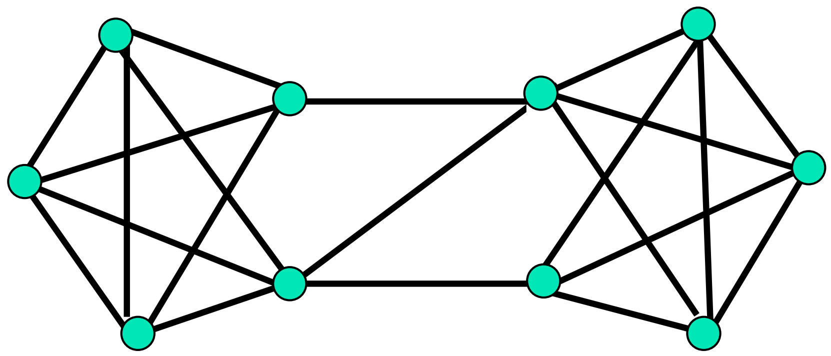
Exemplo:



$\delta=4$

$\kappa'=3$

Exemplo:

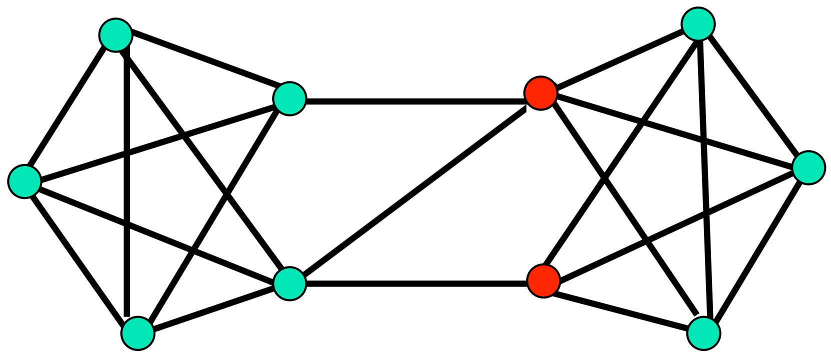


$\delta=4$

$\kappa'=3$

$\kappa=2$

Exemplo:



$\delta=4$

$\kappa'=3$

$\kappa=2$

Blocos

- Um grafo conexo sem vertice de corte

Blocos

- Um grafo conexo sem vertice de corte
- Todo bloco com pelo menos 3 vertices eh 2-conexo

Blocos

- Um grafo conexo sem vertice de corte
- Todo bloco com pelo menos 3 vertices eh 2-conexo
- Um bloco de um grafo eh um subgrafo que eh um bloco e que eh maximal com respeito a esta propriedade

Blocos

- Um grafo conexo sem vertice de corte
- Todo bloco com pelo menos 3 vertices eh 2-conexo
- Um bloco de um grafo eh um subgrafo que eh um bloco e que eh maximal com respeito a esta propriedade
- Todo grafo eh a uniao de seus blocos

Familia de Caminhos internamente disjuntos

- Uma familia de caminhos eh dita internamente disjunta se nenhum vertice de G eh vertice interno de mais do que um caminho da familia

Familia de Caminhos internamente disjuntos

- Uma familia de caminhos eh dita internamente disjunta se nenhum vertice de G eh vertice interno de mais do que um caminho da familia
- Teorema[Whitney, 1932]:
  - Um grafo G com n>2 eh 2-conexo se e somente se quaisquer dois vertices de G sao conectados por pelo menos dois caminhos internamente disjuntos

Corolario: Se G eh 2-conexo, entao quaisquer dois vertices de G pertencem a um mesmo ciclo

Corolario: Se G eh 2-conexo, entao quaisquer dois vertices de G pertencem a um mesmo ciclo

- Segue imediatamente do teorema anterior:

Corolario: Se G eh 2-conexo, entao quaisquer dois vertices de G pertencem a um mesmo ciclo

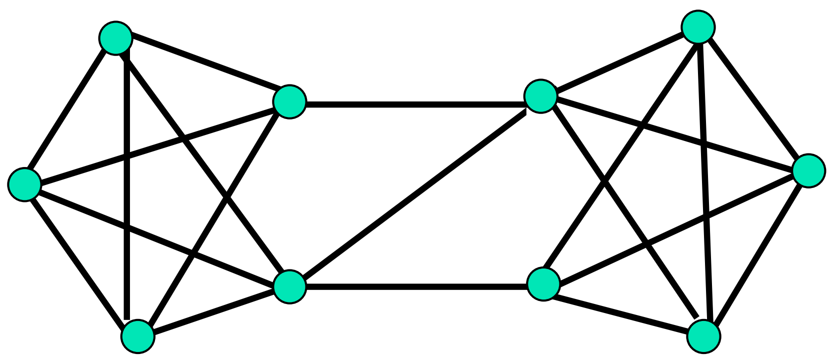
- Segue imediatamente do teorema anterior:
  - Dois vertice pertencem a um mesmo ciclo se e somente se eles sao conectados por dois caminhos disjuntos

Subdivisao de aresta

- Uma aresta eh dita subdividida quando eh apagada e substituida por um caminho de comprimento dois conectando seus extremos, cujo no interno eh um novo vertice

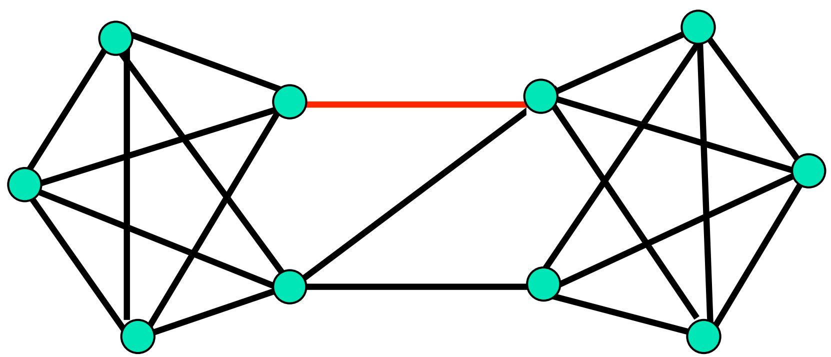
Subdivisao de aresta

- Uma aresta eh dita subdividida quando eh apagada e substituida por um caminho de comprimento dois conectando seus extremos, cujo no interno eh um novo vertice



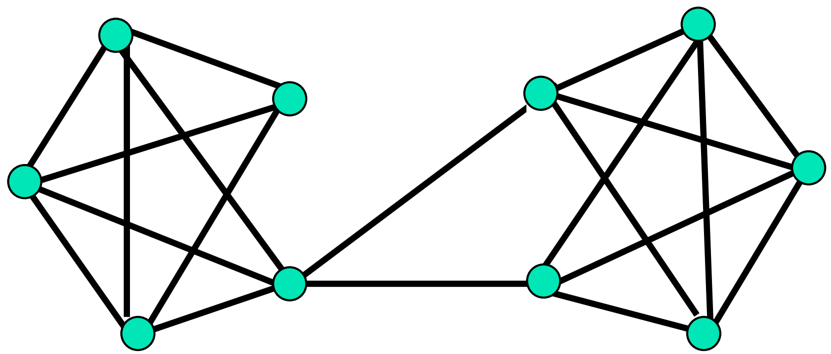
Subdivisao de aresta

- Uma aresta eh dita subdividida quando eh apagada e substituida por um caminho de comprimento dois conectando seus extremos, cujo no interno eh um novo vertice



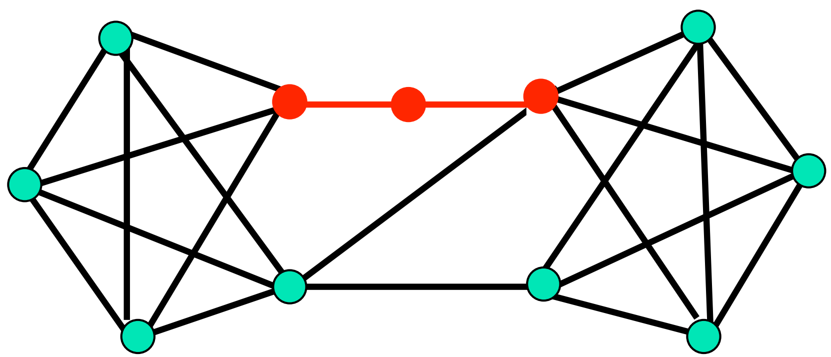
Subdivisao de aresta

- Uma aresta eh dita subdividida quando eh apagada e substituida por um caminho de comprimento dois conectando seus extremos, cujo no interno eh um novo vertice



Subdivisao de aresta

- Uma aresta eh dita subdividida quando eh apagada e substituida por um caminho de comprimento dois conectando seus extremos, cujo no interno eh um novo vertice



Corolario: Se G eh um bloco com n >2, entao quaisquer duas arestas de G pertecem a um mesmo ciclo