Teoria dos Grafos

Loana Tito Nogueira

Corte por Aresta

- Para subconjuntos S e S′ de V, denotamos por [S, S´] o conjunto de arestas com um extremo em S e outro em S´

Corte por Aresta

- Para subconjuntos S e S′ de V, denotamos por [S, S´] o conjunto de arestas com um extremo em S e outro em S´
- Um corte por aresta é um subconjunto de E da forma[S, S´], onde S é um subconjunto não vazio e próprio de V e S´=V\S

Bond

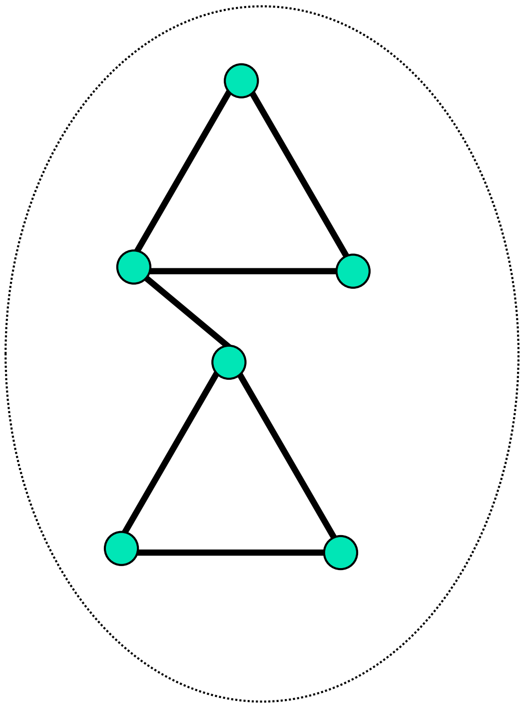
- Um corte por aresta minimal de G é chamado bond.

Bond

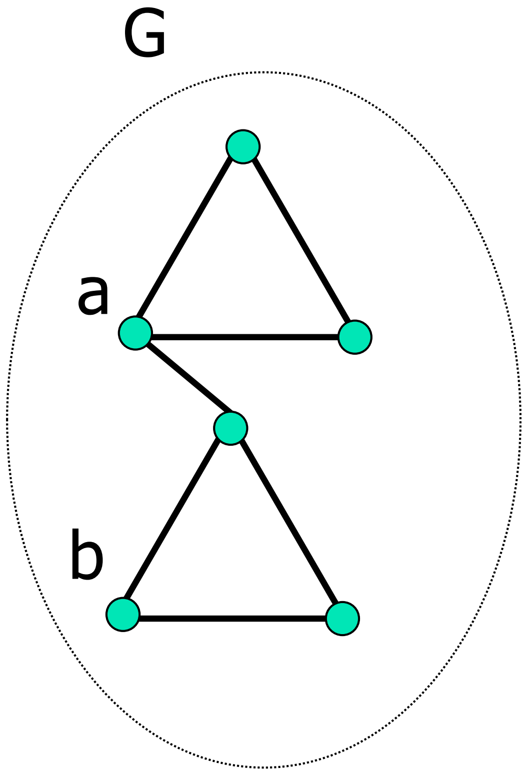
- Um corte por aresta minimal de G é chamado bond.
- Se G é conexo, então um bond B de G é um subconjunto minimal de E tal que G-B é desconexo.

Exemplo:

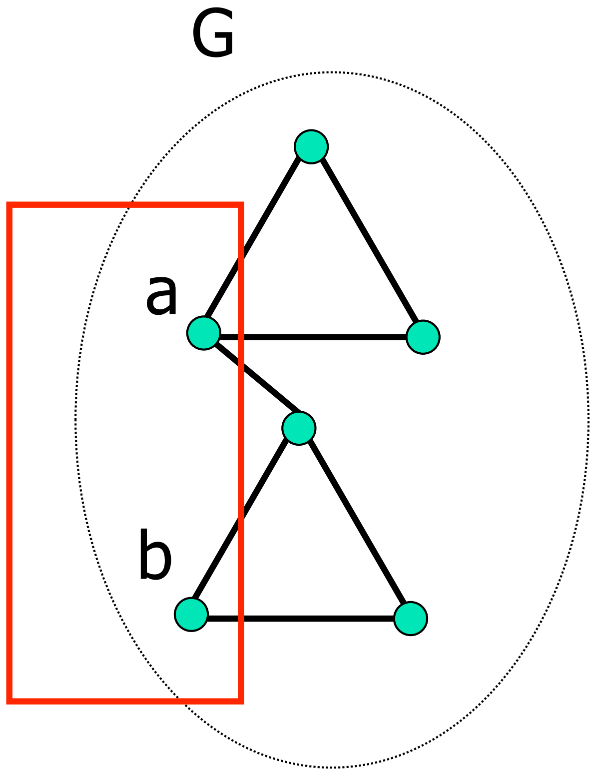
G



Exemplo:

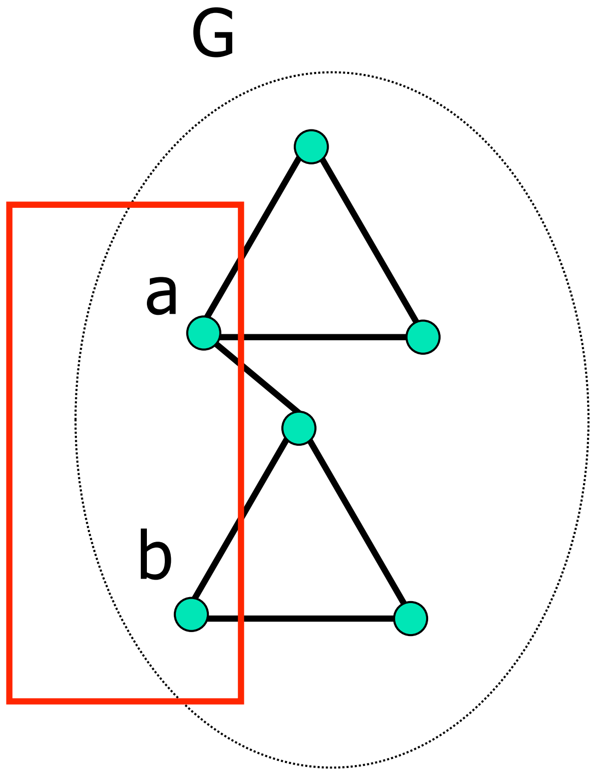


Exemplo:



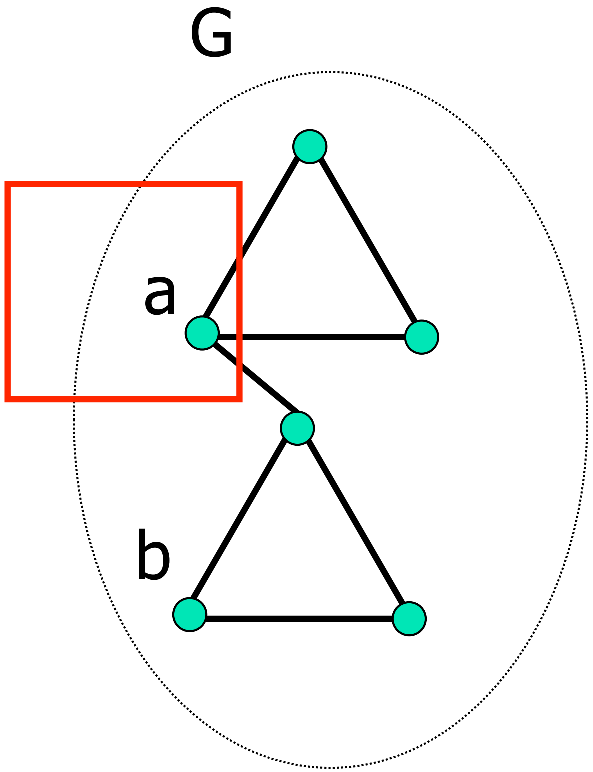
É um corte por aresta!

Exemplo:

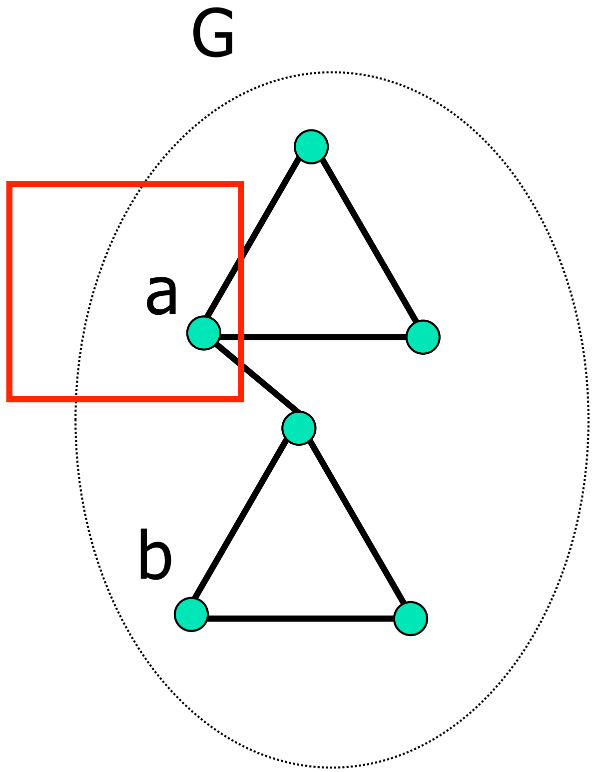


Mas não é minimal!!!

Exemplo:

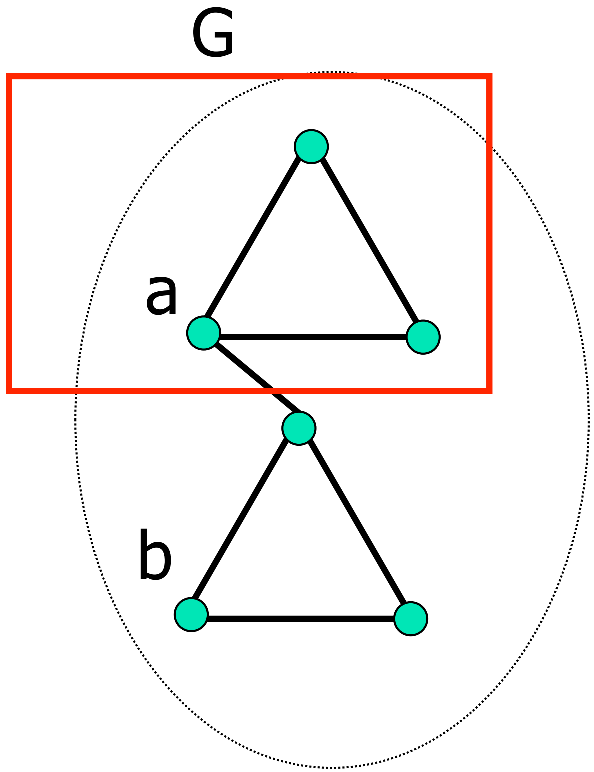


Exemplo:



Também não é minimal!!!

Exemplo:



É um bond

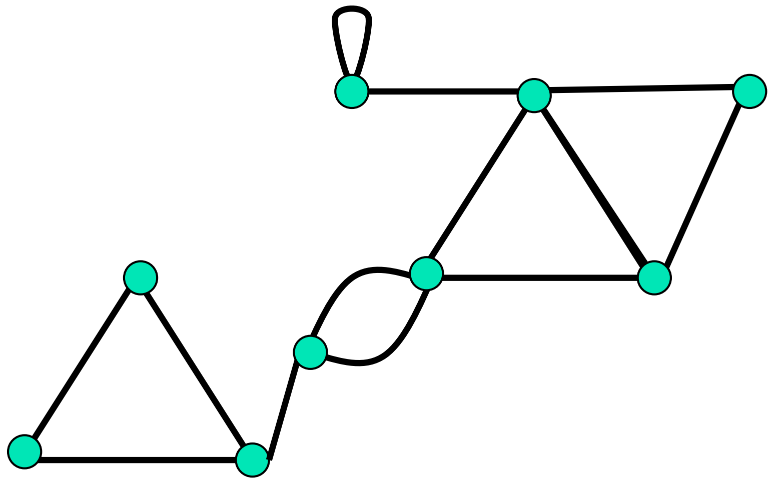
Vértice de Corte

Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.

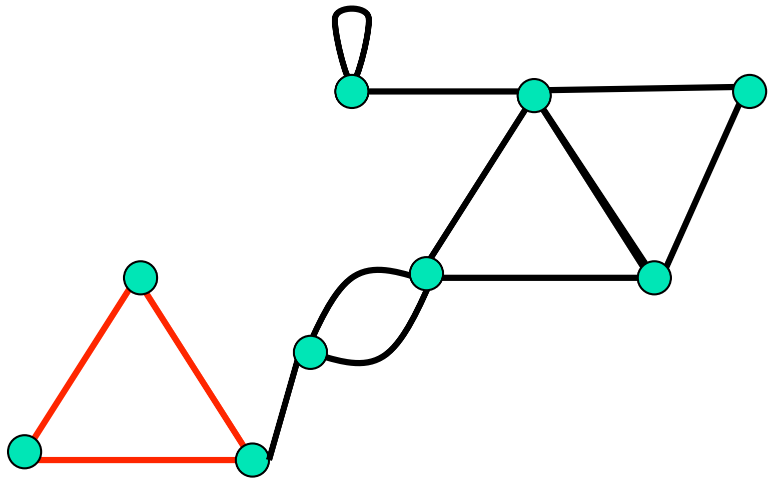
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



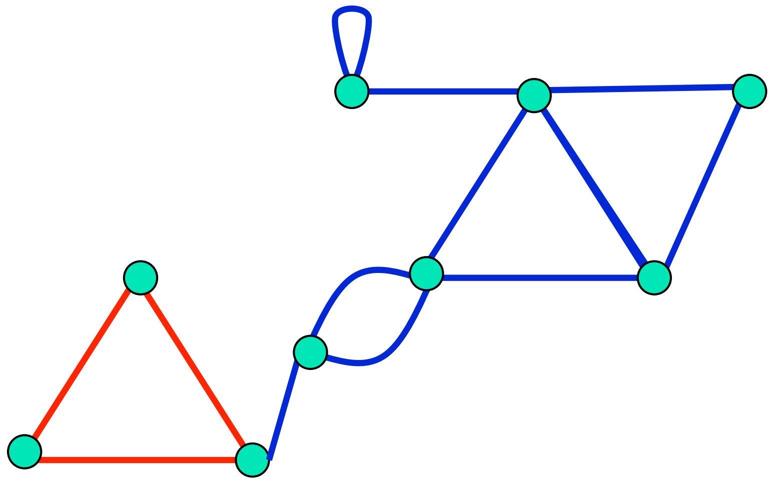
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



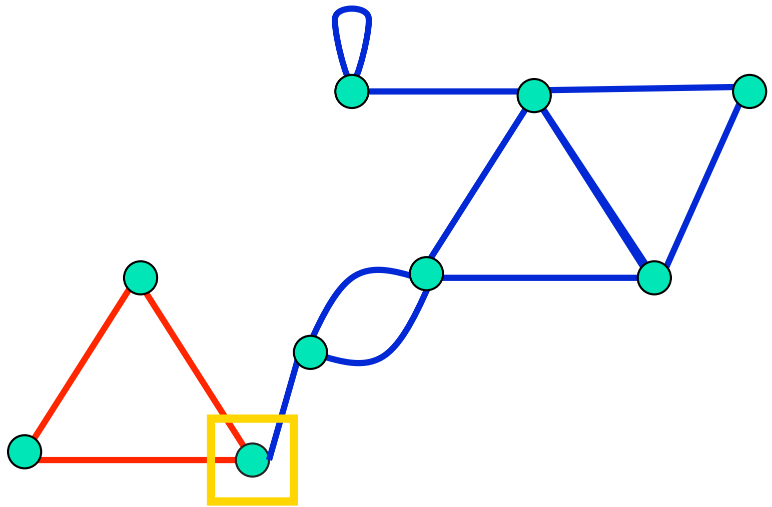
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



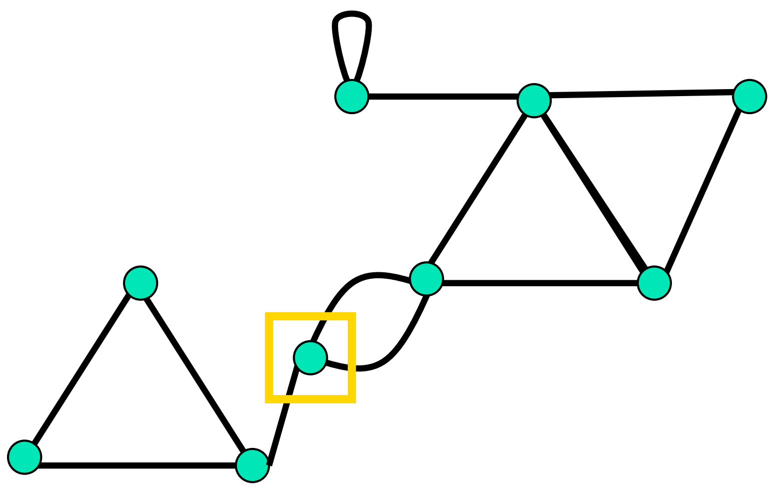
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



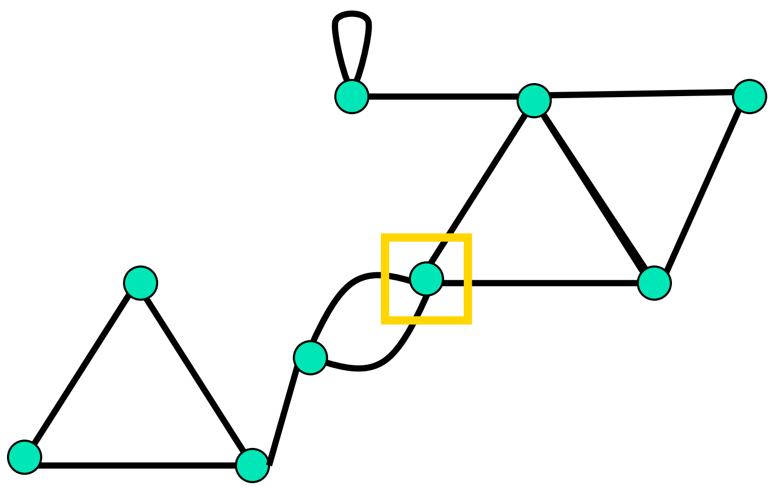
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



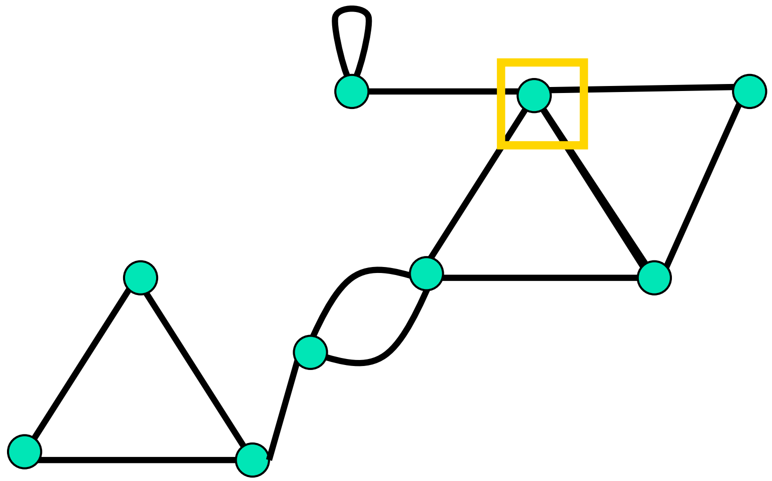
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



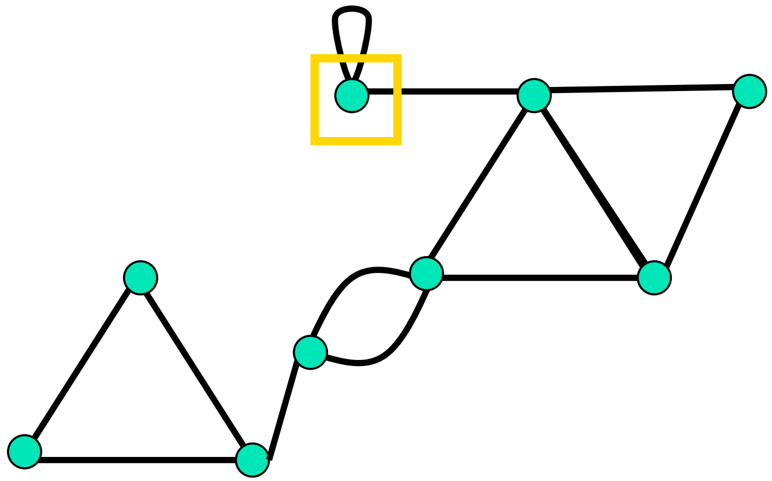
Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
- Ex.:



Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
  - Se G não possui loops e é um grafo não trivial, então v é um vértice de corte se e somente se $w(G-v) > w(G)$.

Vértice de Corte

- Um vértice de G é um vértice de corte se E pode ser particionado em 2 subconjuntos não vazios E_1 e E_2 tais que $G[E_1]$, e $G[E_2]$ possuem um vértice em comum.
  - Se G não possui loops e é um grafo não trivial, então v é um vértice de corte se e somente se $w(G-v) > w(G)$.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- ($\rightarrow$) Contradição!

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

- (→) Contradição!
- $d(v)=0$

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.
- $d(v)=1$

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.
- $d(v)=1$, G-v é um grafo acíclico com $n(G-v)-1$ arestas

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.
- $d(v)=1$, $G-v$ é um grafo acíclico com $n(G-v)-1$ arestas, e logo uma árvore. Portanto $w(G-v)=w(G)$ e v não é vértice de corte de G.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

- (→) Contradição!
- d(v)=0 , G ≈ K_1, v não é vértice de corte.
- d(v)=1, G-v é um grafo acíclico com n(G-v)-1 arestas, e logo uma árvore.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- $(\rightarrow)$ Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.
- $d(v)=1$, G-v é um grafo acíclico com $n(G-v)-1$ arestas, e logo uma árvore. Portanto $w(G-v)=w(G)$

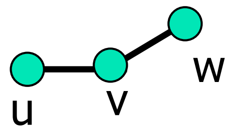
Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- ($\rightarrow$) Contradição!
- $d(v)=0$, $G \approx K_1$, v não é vértice de corte.
- $d(v)=1$, $G-v$ é um grafo acíclico com $n(G-v)-1$ arestas, e logo uma árvore. Portanto $w(G-v)=w(G)$ e v não é vértice de corte de G.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

- (→) Contradição!

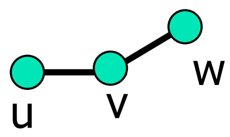
- (←) d(v) >1,



Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se $d(v) > 1$

- ($\rightarrow$) Contradição!

- ($\leftarrow$) $d(v) > 1$,

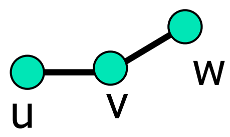


uvw é o único caminho-(u,v) em G,

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

- (→) Contradição!

- (←) d(v) >1,



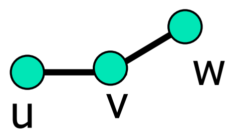
uvw é o único caminho-(u,v) em G,

logo w(G-v) >w(G)=1.

Teorema: Um vértice v de uma árvore G é um vértice de corte se e somente se d(v) > 1

- (→) Contradição!

- (←) d(v) >1,



  uvw é o único caminho-(u,v) em G,
  logo w(G-v) >w(G)=1. Então, v é um vértice de corte de G

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)
- Seja v qualquer um desses vértices

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)
- Seja v qualquer um desses vértices
  - w(T-v)=1

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)
- Seja v qualquer um desses vértices
  - $w(T-v)=1$

Como T é uma árvore geradora de G, T-v é um subgrafo gerador de G-v

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)
- Seja v qualquer um desses vértices
  - $w(T\text{-}v)=1$

Como T é uma árvore geradora de G, T-v é um subgrafo gerador de G-v e portanto $w(G\text{-}v) \leq w(T\text{-}v)$.

Corolário: Todo grafo conexo sem loop e não trivial tem pelo menos 2 vértices que não são vértices de corte

- G contém uma árvore geradora T.
- T contém pelo menos dois vérties de grau 1 (e que não são vértices de corte)
- Seja v qualquer um desses vértices
  - w(T-v)=1

  Como T é uma árvore geradora de G, T-v é um subgrafo gerador de G-v e portanto w(G-v) ≤ w(T-v).

  Logo, w(G-v)=1, e v não é um vértice de corte de G

Fórmula de Cayley

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

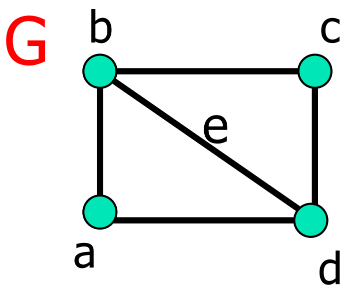
Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e



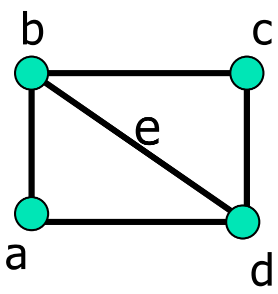
Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e

G



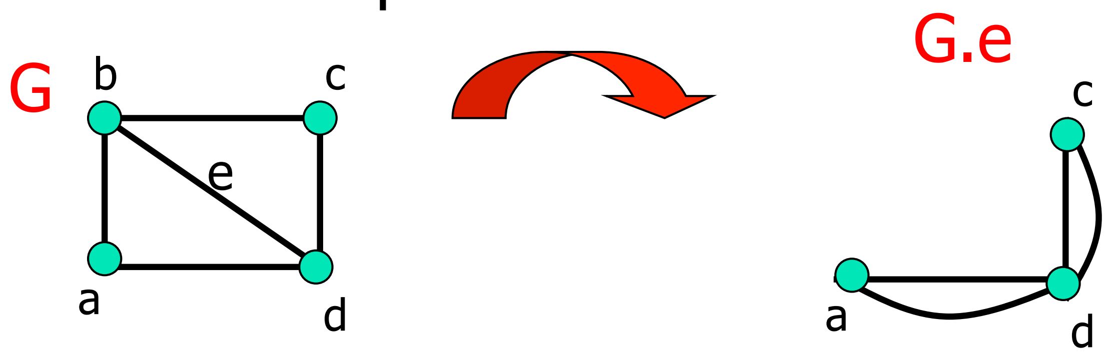
G.e

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e

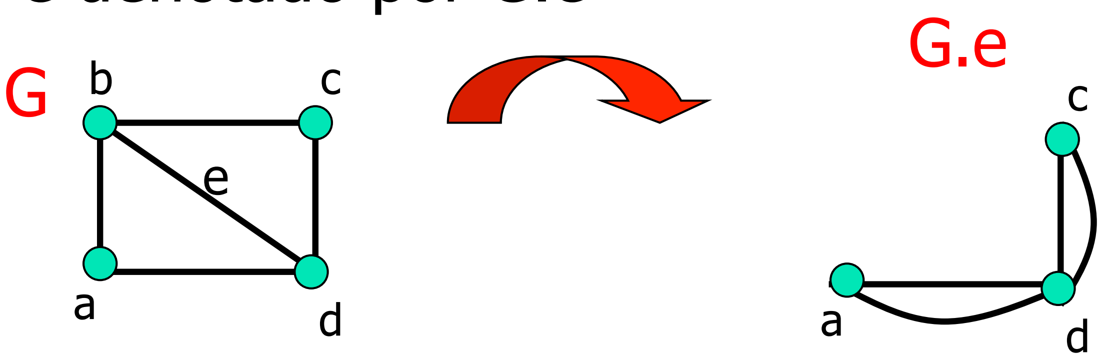


Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e



Se e é um link

n(G.e) =n(G)-1

m(G.e)= m(G)

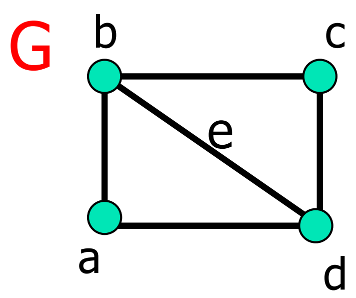
W(G.e)=w(G)

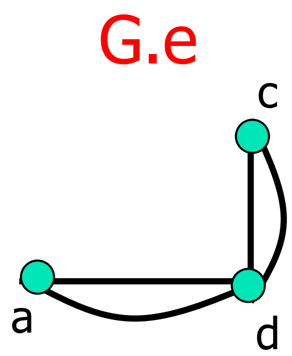
Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e





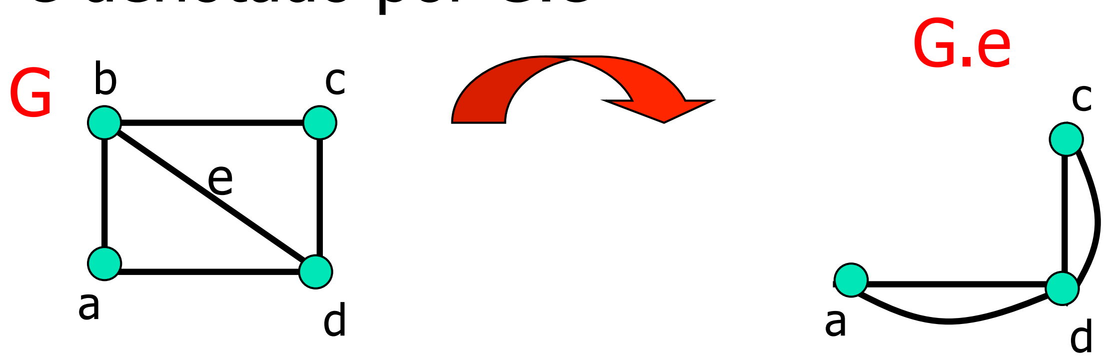
Se e é um link
n(G.e) =n(G)-1
m(G.e)= m(G)
W(G.e)=w(G)

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e



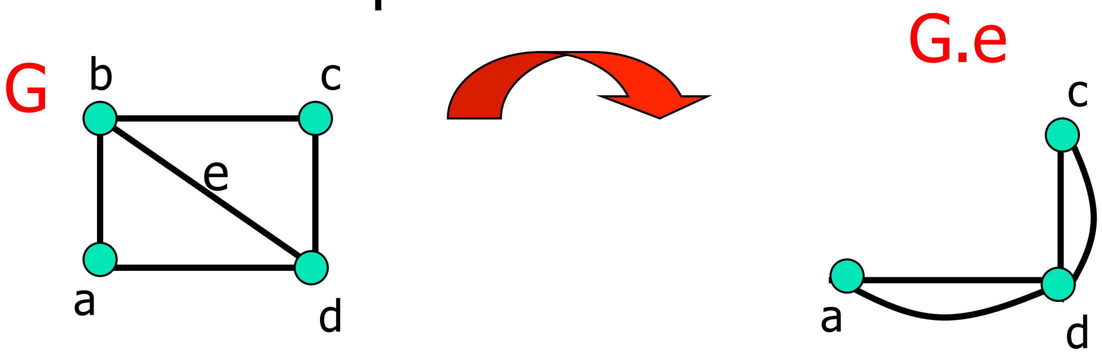
Se e é um link
n(G.e) =n(G)-1
m(G.e)= m(G)

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e



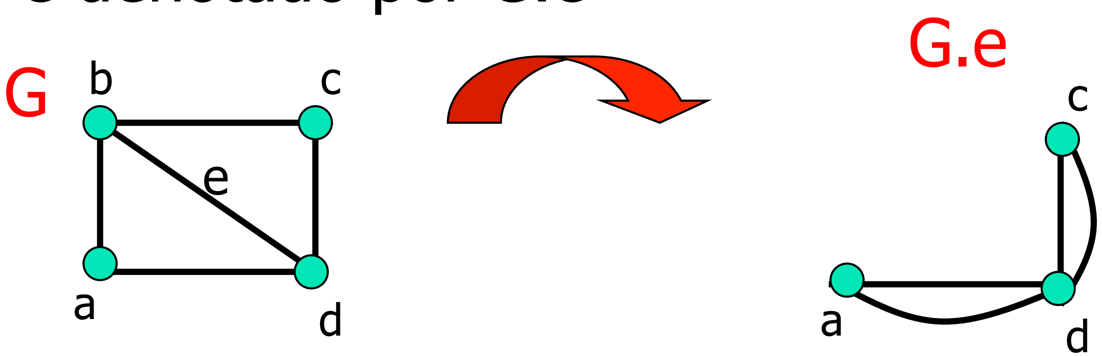
Se e é um link
n(G.e) =n(G)-1
m(G.e)= m(G)
w(G.e)=w(G)

Fórmula de Cayley

- # de árvores geradoras de um grafo

Contração de arestas

Uma aresta de G é dita **contraída** se é apagada do grafo e seus extremos são identificados; o grafo resultante é denotado por G.e



Se T é uma árvore

⬇

T.e é uma árvore

Teorema: Se e é um link de G, então $\tau(G) = \tau(G\text{-}e) + \tau(G.e)$

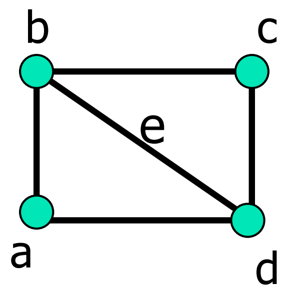
Teorema: Se e é um link de G, então $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$

- $\tau(G)$: o número de árvores geradoras de G

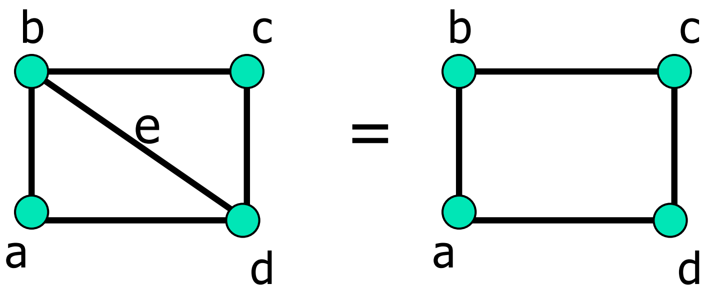
Teorema: Se e é um link de G, então $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G.e)$

- $\tau(G)$: o número de árvores geradoras de G
- Idéia: # de árvore geradoras contendo e
  # de árvores geradoras sem e

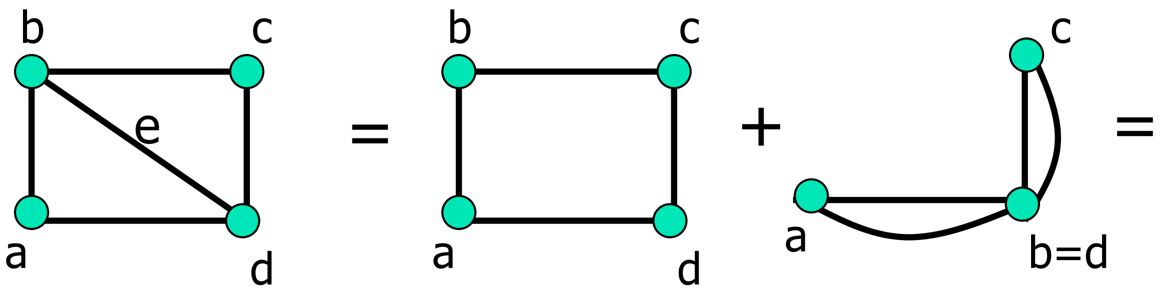
Cálculo recursivo de $\tau(G)$



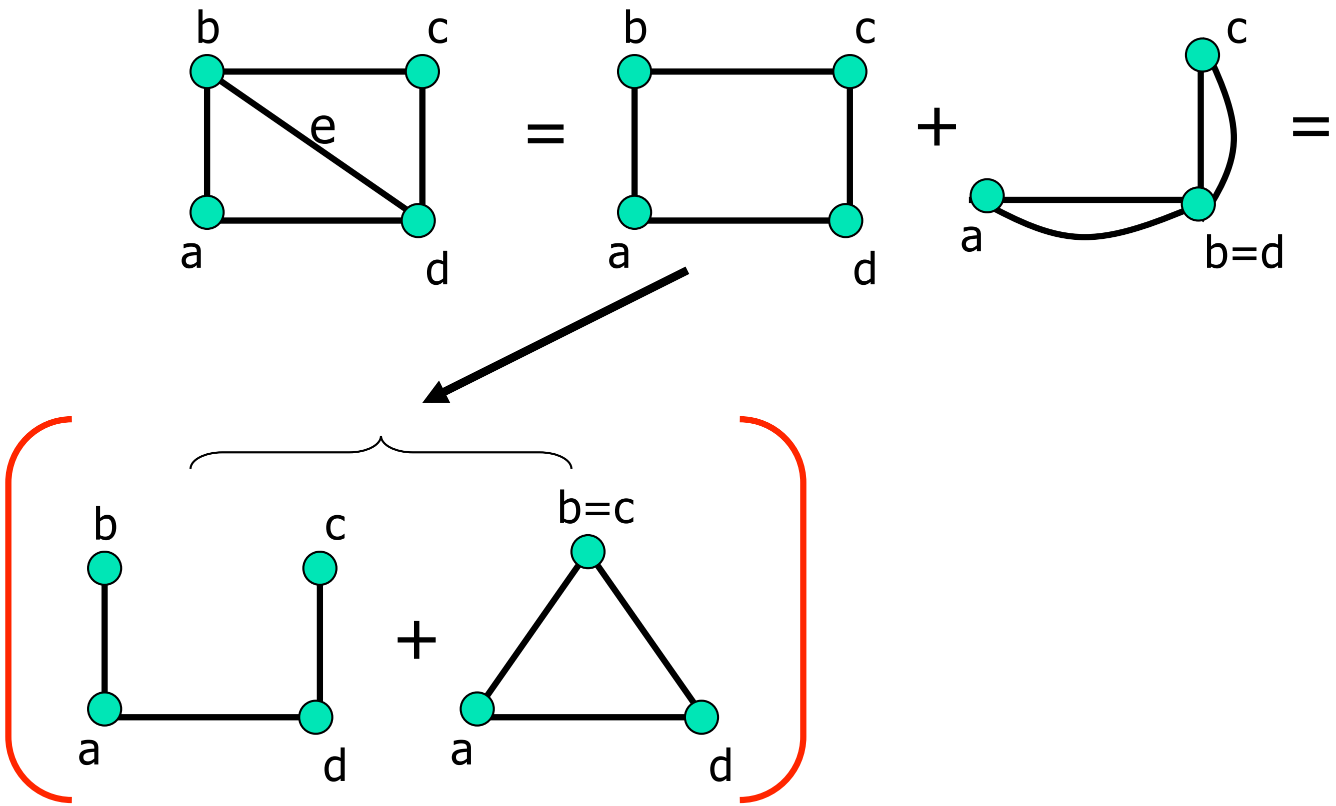
Cálculo recursivo de $\tau(G)$



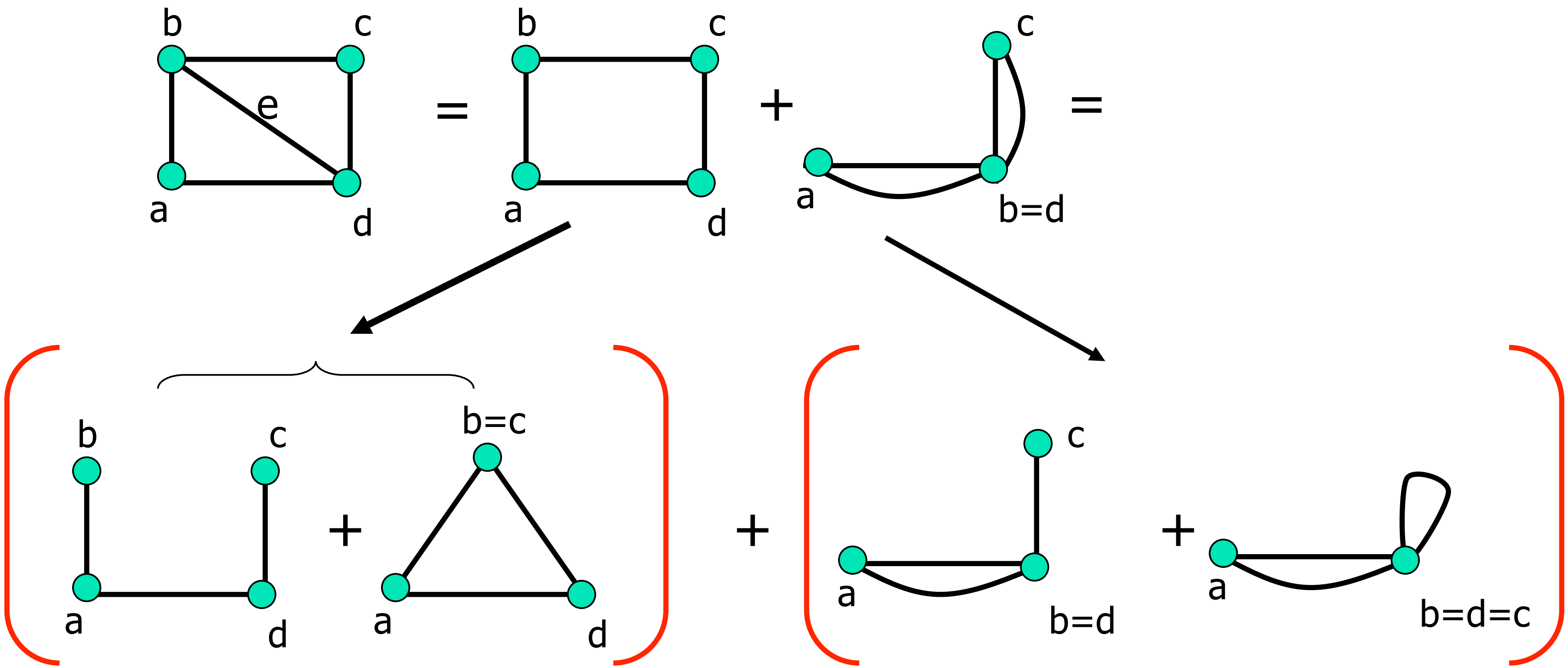
Cálculo recursivo de $\tau(G)$



Cálculo recursivo de τ(G)



Cálculo recursivo de $\tau(G)$



Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Seja $N=\{1,2,\ldots, n\}=V(K_n)$

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Seja $N=\{1,2,\ldots, n\}=V(K_n)$
- $\mathbf{n^{n-2}}$ é o número de sequências de comprimento n-2 que podem ser formadas a partir de N

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Seja $N=\{1,2,\ldots, n\}=V(K_n)$
- $\mathbf{n^{n-2}}$ é o número de sequências de comprimento n-2 que podem ser formadas a partir de N
- É suficiente mostrar que existe uma correspondência de um para um entre o conjunto de árvores geradoras de K_n e este conjunto de sequências.

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- A cada árvore geradora T de K_n, associamos uma sequência única $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ como segue:

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- A cada árvore geradora T de K_n, associamos uma sequência única $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ como segue:
  - Ordene N, seja s_1 o 1º vértice de grau 1 em T; o vértice adjacente a s_1 é tomado como t_1;

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- A cada árvore geradora T de K_n, associamos uma sequência única $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ como segue:
  - Ordene N, seja s_1 o 1º vértice de grau 1 em T; o vértice adjacente a s_1 é tomado como t_1;
  - Apague s_1 de T;

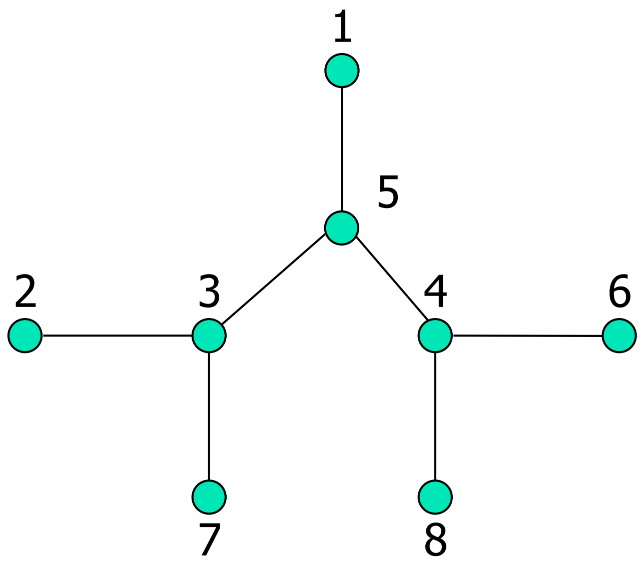
Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- A cada árvore geradora T de K_n, associamos uma sequência única $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ como segue:
  - Ordene N, seja s_1 o 1º vértice de grau 1 em T; o vértice adjacente a s_1 é tomado como t_1;
  - Apague s_1 de T;
  - Denote por s_2 o 1º vértice de grau 1 em T-s_1; o vértice adjacente a s_2 é t_2;

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

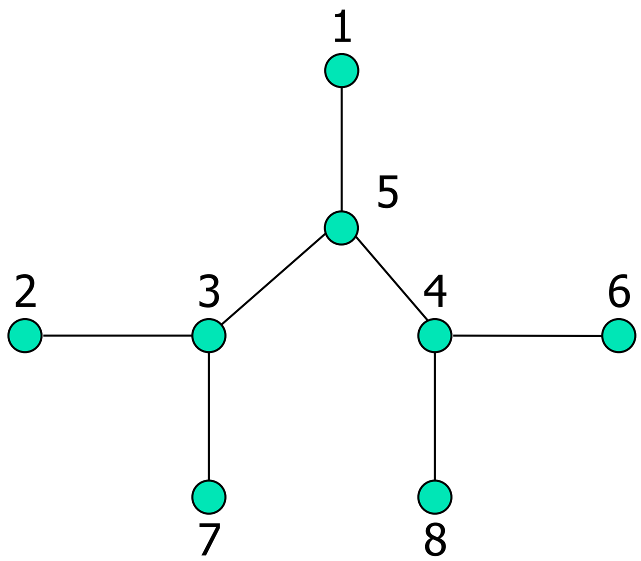
- A cada árvore geradora T de K_n, associamos uma sequência única $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})$ como segue:
  - Ordene N, seja s_1 o 1º vértice de grau 1 em T; o vértice adjacente a s_1 é tomado como t_1;
  - Apague s_1 de T;
  - Denote por s_2 o 1º vértice de grau 1 em T-s_1; o vértice adjacente a s_2 é t_2;
  - Repita esta operação até determinar t_{n-2} e até que o grafo resultante seja uma árvore com dois vértices

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$



$\boxed{(4,3,5,3,4,5)}$

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$



$(4,3,5,3,4,5)$

Diferentes árvores geradoras de K_n geram diferentes sequências

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N \setminus \{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)$-1 vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\backslash\{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\backslash\{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)$-1 vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N \backslash \{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N \backslash \{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N \setminus \{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\backslash\{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\backslash\{s_1, \ldots,s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\backslash\{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\backslash\{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\backslash\{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\backslash\{s_1, \ldots,s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\backslash\{s_1\} \notin (t_2,\ldots,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\backslash\{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Teorema: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

- Qualquer vértice v de T ocorre $d_T(v)-1$ vezes em $(t_1,...,t_{n-2})$
- Os vértices de grau 1 são aqueles que não aparecem nesta sequência
- Seja s_1 o 1º vértice de $N \notin (t_1,...,t_{n-2})$
- Una s_1 a t_1
- Seja s_2 o 1º vértice de $N\setminus\{s_1\} \notin (t_2,...,t_{n-2})$
- Una s_2 a t_2
- Continua até obter um grafo com n-2 arestas
- Adicione a aresta unindo os 2 vértices de $N\setminus\{s_1, ...,s_{n-2}\}$

Diferentes sequências produzem diferentes árvores!!

Usando a fórmula do teorema, calcule o número de árvores geradoras em $K_{3,3}$