Teoria dos Grafos – Aula 2

Profª.: Loana T. Nogueira

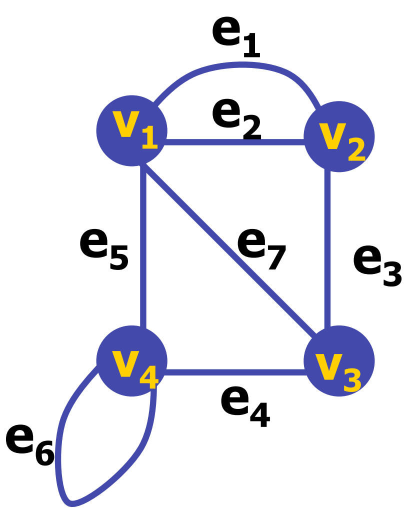
Matriz de Incidência (v x e)

Matriz de Incidência (v x e)

- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes

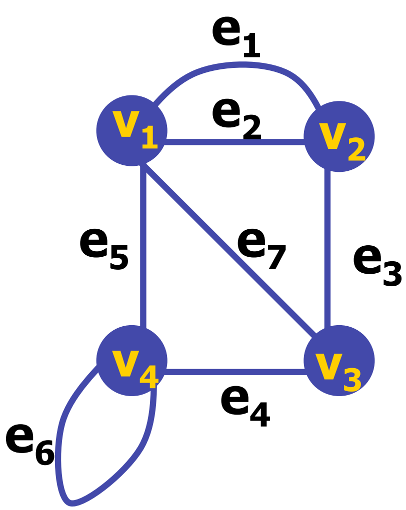
Matriz de Incidência (v x e)

- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



Matriz de Incidência (v x e)

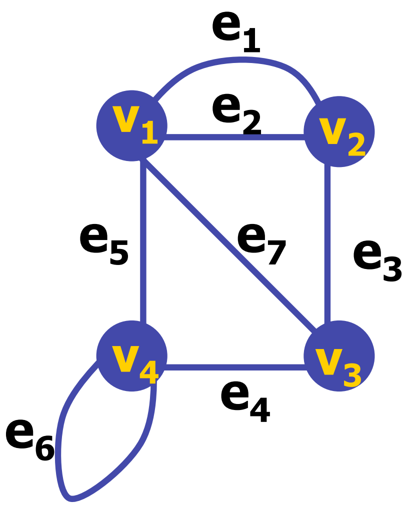
- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1							
v_2							
v_3							
v_4							

Matriz de Incidência (v x e)

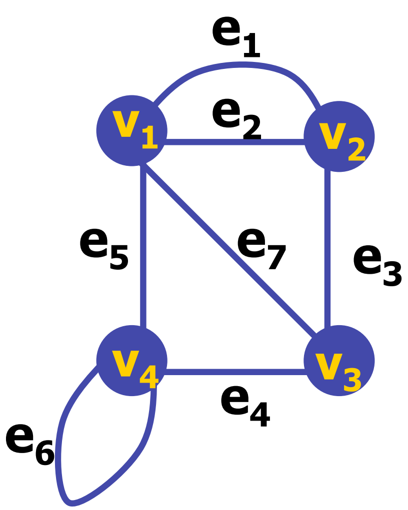
- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2							
v_3							
v_4							

Matriz de Incidência (v x e)

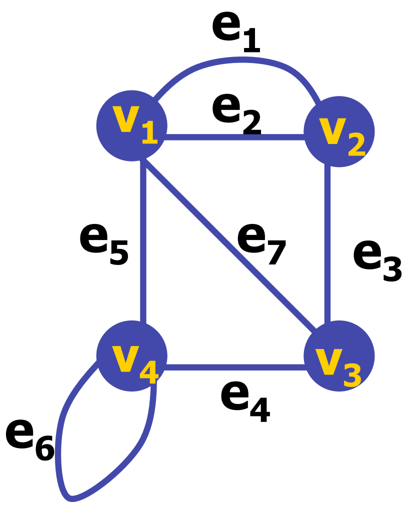
- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3							
v_4							

Matriz de Incidência (v x e)

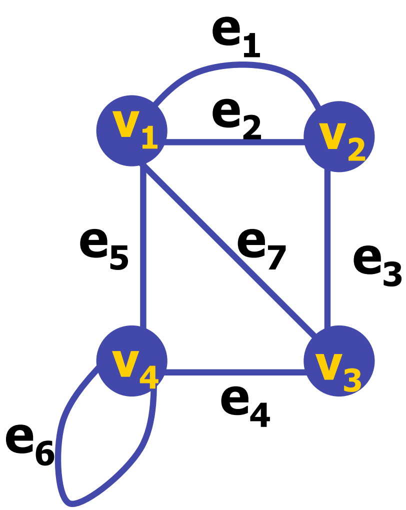
- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4							

Matriz de Incidência (v x e)

- $M_G=[m_{ij}]$
  - m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

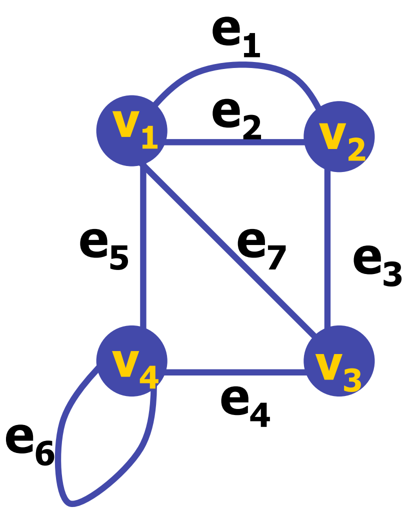
Matriz de Adjacência (v x v)

Matriz de Adjacência (v x v)

- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j

Matriz de Adjacência (v x v)

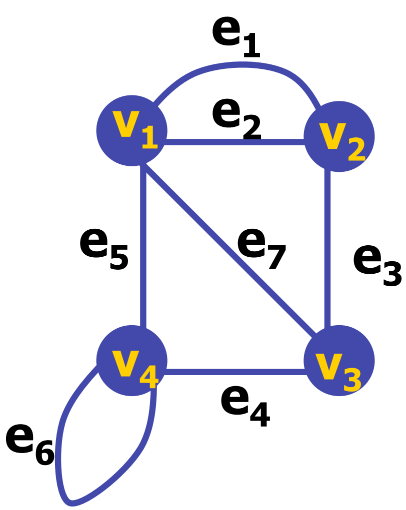
- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1				
v_2				
v_3				
v_4				

Matriz de Adjacência (v x v)

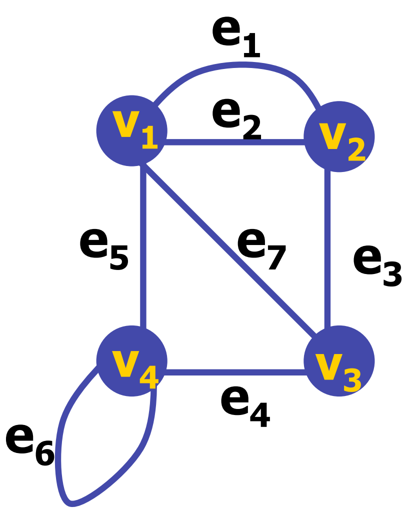
- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2				
v_3				
v_4				

Matriz de Adjacência (v x v)

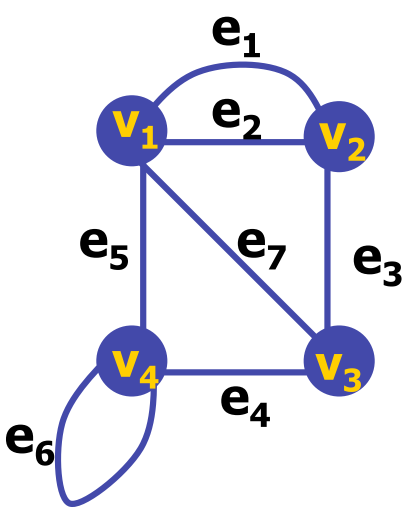
- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3				
v_4				

Matriz de Adjacência (v x v)

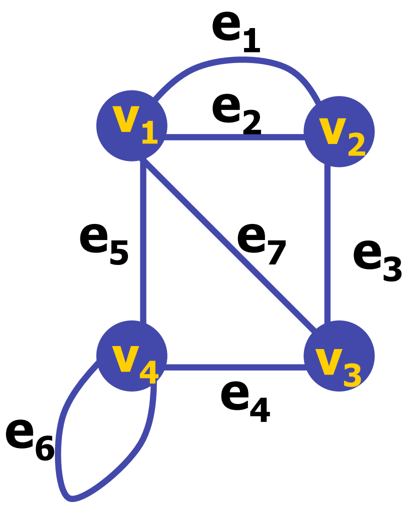
- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4				

Matriz de Adjacência (v x v)

- $A_G=[a_{ij}]$
  - a_{ij} é o número de arestas ligando v_i e v_j



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

Subgrafos

Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$

Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
- Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, denotamos $H \subset G$ e dizemos que H é subgrafo próprio de G

Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
- Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, denotamos $H \subset G$ e dizemos que H é subgrafo próprio de G
- Se H é um subgrafo de G então G é um supergrafo de H

Subgrafos

- Um grafo H é um subgrafo de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
- Quando $H \subseteq G$ e $H \neq G$, denotamos $H \subset G$ e dizemos que H é subgrafo próprio de G
- Se H é um subgrafo de G então G é um supergrafo de H
- Um subgrafo gerador de G é um subgrafo H com $V(H) = V(G)$

Subgrafo Induzido

Subgrafo Induzido

- Seja V´ um subconjunto não vazio de V. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V´ e o conjunto de arestas é o conjunto de todas as arestas de G com ambos extremos em V´ é chamado de subgrafo de G induzido por V’.

Subgrafo Induzido

- Seja V´ um subconjunto não vazio de V. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V´ e o conjunto de arestas é o conjunto de todas as arestas de G com ambos extremos em V´ é chamado de subgrafo de G induzido por V'.
  - G[V']: é um subgrafo induzido de G.

G[v\v´], denotado por G-V'

- É o subgrafo obtido a partir de G pela remoção dos vértices em V´ e suas arestas incidentes
- Se V´={v}, escrevemos G-v ao invés de G-{v}

Subgrafo induzido (por aresta)

- Seja E´um subconjunto não vazio de arestas de E. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto dos extremos das arestas em E, cujo conjunto de arestas é E´ é chamado de subgrafo de induzido por arestas

Subgrafo induzido (por aresta)

- Seja E´um subconjunto não vazio de arestas de E. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto dos extremos das arestas em E, cujo conjunto de arestas é E´ é chamado de subgrafo de induzido por arestas

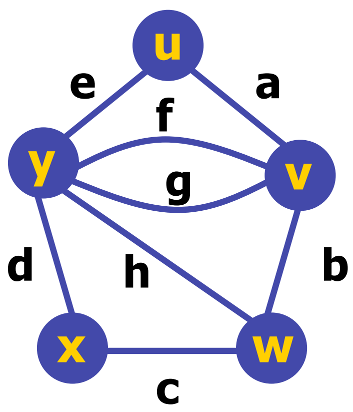
Subgrafo induzido (por aresta)

- G- E´: subgrafo gerador de G com conjunto de arestas E\E´

Subgrafo induzido (por aresta)

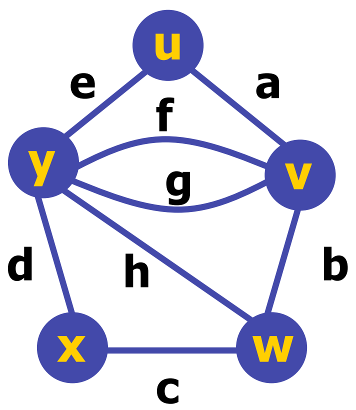
- G- E´: subgrafo gerador de G com conjunto de arestas E\E´
- G+E´: grafo obtido a partir de G adicionando um conjunto de arestas E

Exemplo



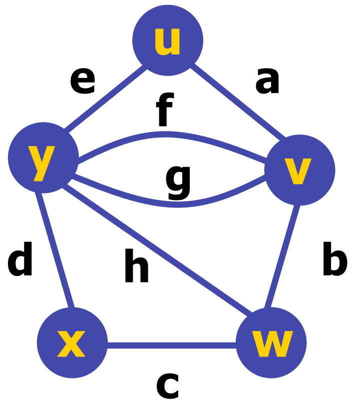
Exemplo

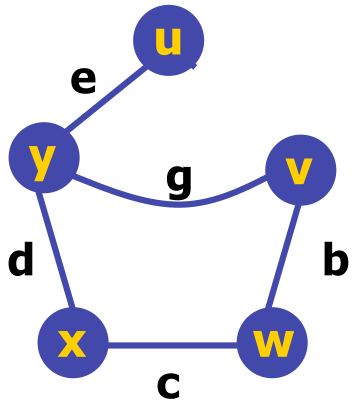
Um subgrafo gerador de G



Exemplo

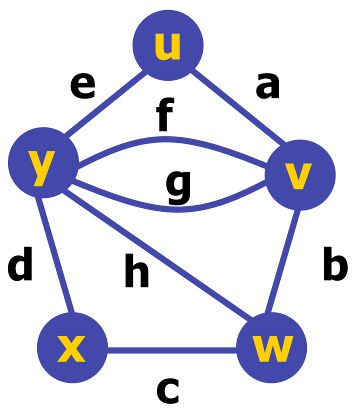
Um subgrafo gerador de G





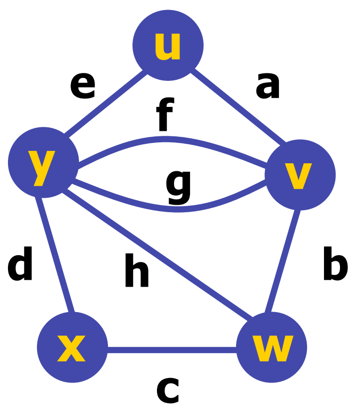
Exemplo

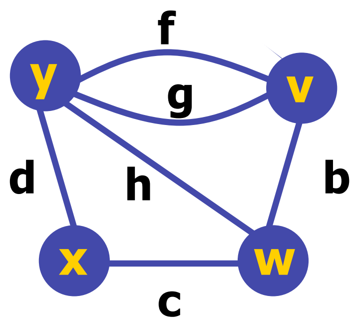
G – {u,w}



Exemplo

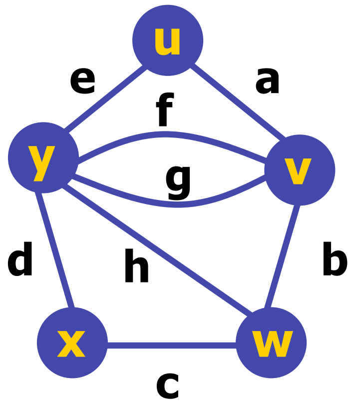
G – {u,w}

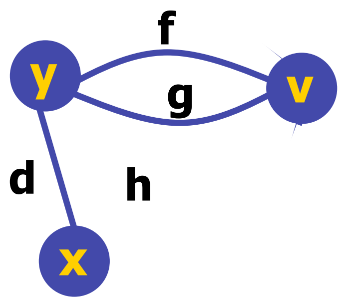




Exemplo

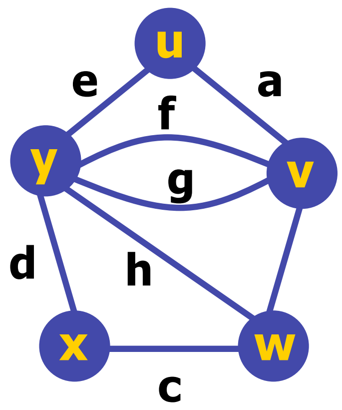
G – {u,w}





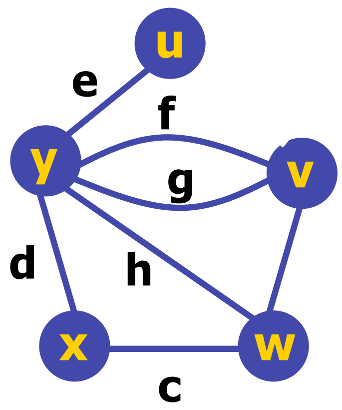
Exemplo

G-{a, b, f}



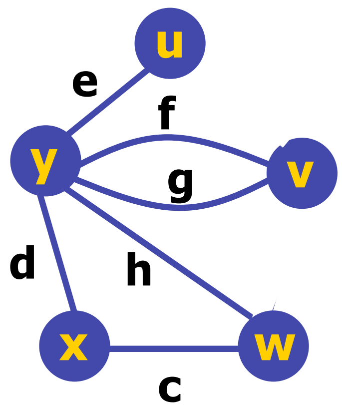
Exemplo

G-{a, b, f}



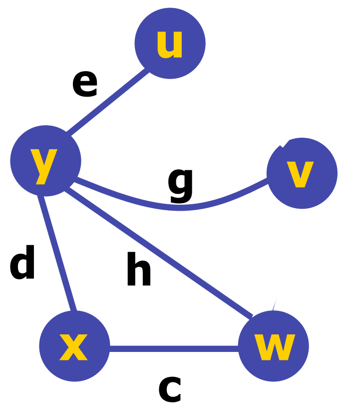
Exemplo

G-{a, b, f}



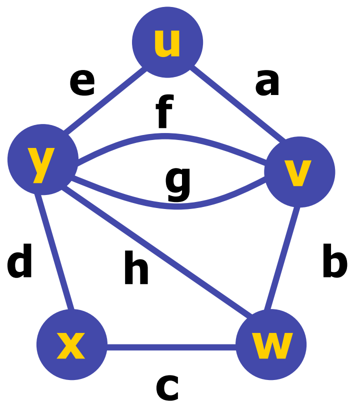
Exemplo

G-{a, b, f}



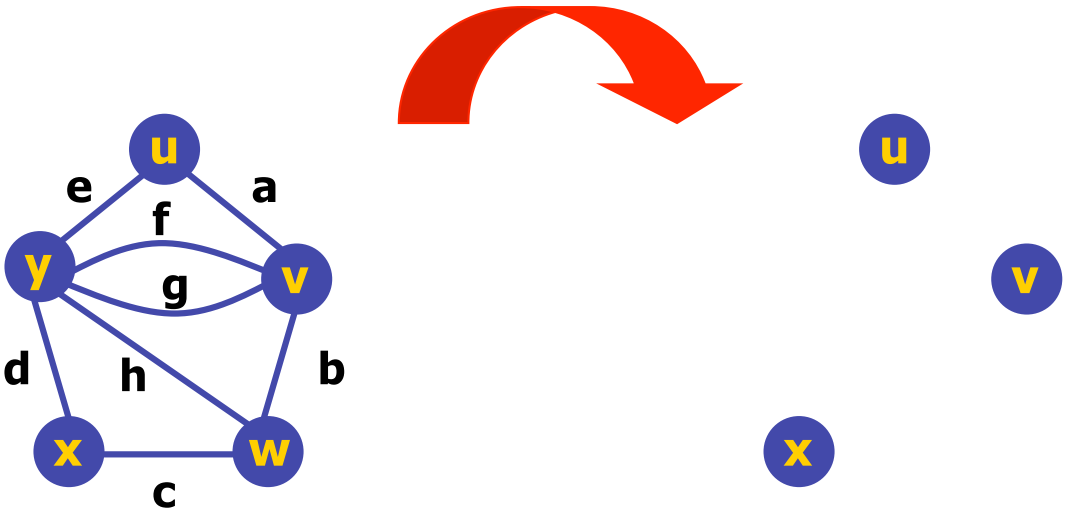
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



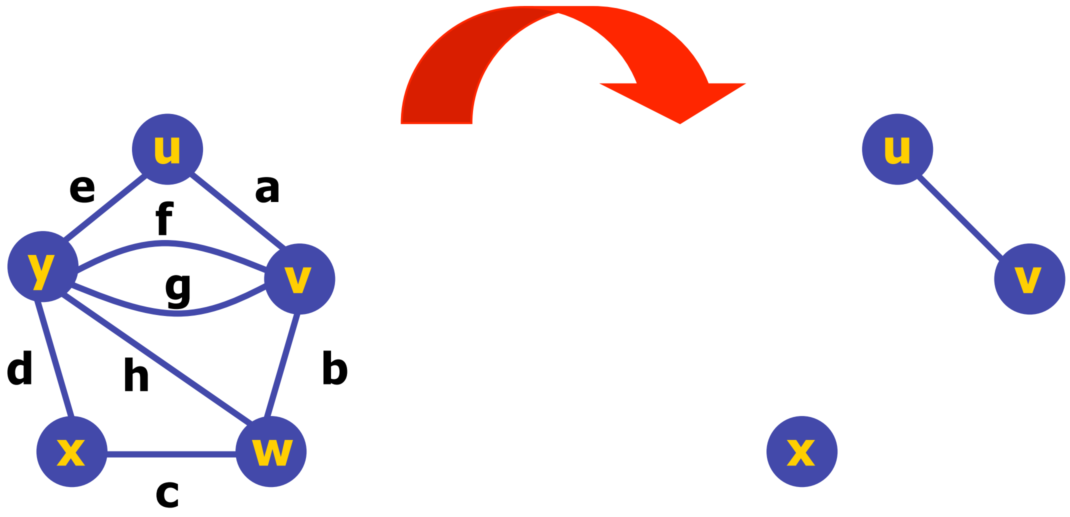
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



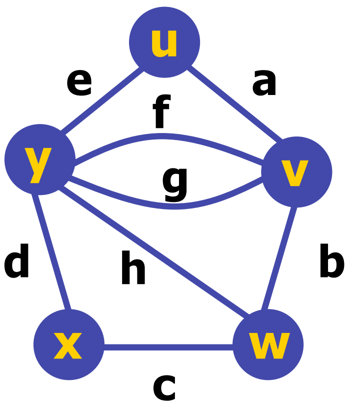
Exemplo

O subgrafo induzido G[u, v, x]



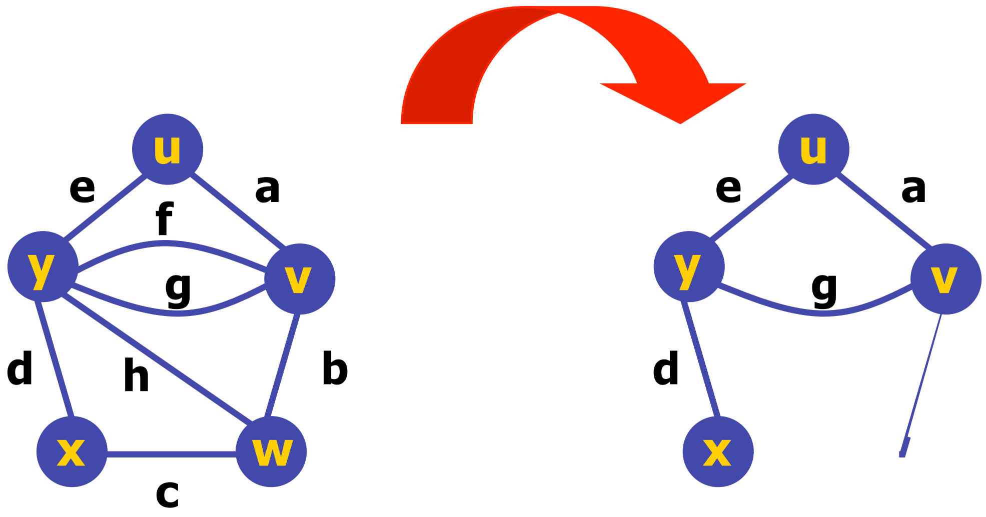
Exemplo

O subgrafo induzido G[a, d, e, g] por aresta



Exemplo

O subgrafo induzido G[a, d, e, g] por aresta



Subgrafos Disjuntos

- Sejam G_1, $G_2 \subseteq G$

Subgrafos Disjuntos

- Sejam G_1, $G_2 \subseteq G$

G_1 e G_2 são disjutos se $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$

Subgrafos Disjuntos em aresta

Subgrafos Disjuntos em aresta

- Sejam G_1, $G_2 \subseteq G$

Subgrafos Disjuntos em aresta

- Sejam G_1, $G_2 \subseteq G$

G_1 e G_2 são disjutos em aresta se
$E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$

União de Grafos

União de Grafos

- $G_1 \cup G_2$: é o subgrafo com conjunto de vértice $V(G_1) \cup V(G_2)$ e conjunto de aresta $E(G_1) \cup E(G_2)$

União de Grafos

- $G_1 \cup G_2$: é o subgrafo com conjunto de vértice $V(G_1) \cup V(G_2)$ e conjunto de aresta $E(G_1) \cup E(G_2)$

- $G_1 + G_2$ se G_1 e G_2 são disjuntos

Interseção

- Similar, mas neste casa G_1 e G_2 devem ter ao menos um vértice em comum

Grau dos vértices

Grau dos vértices

- O grau $d_G(v)$ de um vértice v em G é o número de arestas de G incidentes a v
  - Cada loop conta como duas arestas

Grau dos vértices

- O grau $d_G(v)$ de um vértice v em G é o número de arestas de G incidentes a v
  - Cada loop conta como duas arestas
  - $\delta(G)$: grau mínimo de G
  - $\Delta(G)$: grau máximo de G

Teorema: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

Teorema: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$

Prova por indução em n!!!

Corolário: Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Corolário: Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

- V_1: conjunto do vértices de G com grau par
- V_2: conjunto dos vértices de G com grau ímpar

Corolário: Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

- V_1: conjunto do vértices de G com grau par
- V_2: conjunto dos vértices de G com grau ímpar

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

Grafo k-regular

- G é k-regular se $d(v) = k, \forall\ v \in V$

Grafo k-regular

- G é k-regular se $d(v) = k, \forall\ v \in V$

- Um grafo G é regular se é k-regular para algum k.

Caminhos

- Um passeio em G é uma sequência não-nula $W=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tais que, $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i.

Caminhos

- Um passeio em G é uma sequência não-nula $W=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tais que, $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i.
- W é um passeio de v_0 a v_k.

Caminhos

- Um passeio em G é uma sequência não-nula $W=v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tais que, $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i.
- W é um passeio de v_0 a v_k.
- v_0 : início do passeio
- v_k : término do passeio

Caminhos

- Um passeio em G é uma sequência não-nula $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$, cujos termos são alternadamente vértices e arestas, tais que, $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i.
- W é um passeio de v_0 a v_k.
- v_0 : início do passeio
- v_k : término do passeio
- K: comprimento do caminho

Trilha

- Não pode repetir arestas

Caminho

- Não pode repetir vértices (nem arestas)

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G.
  - Notação: caminho-(u,v)

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G
  - Notação: caminho-(u,v)
- G é dito conexo se existir caminho entre quaisquer dois vértices de G

Grafo Conexo

- u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G
  - Notação: caminho-(u,v)
- G é dito conexo se existir caminho entre quaisquer dois vértices de G

Relação de Equivalência definida pela conexão entre os vértices

Equivalência

- Reflexiva

Equivalência

- Caminho-(u, u)

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Simétrica

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)
- Transitiva

Equivalência

- Caminho-(u, u)
- Se existe caminho-(u,v) então existe caminho-(v,u)
- Se existem os caminhos-(u,v) e –(v,w) então existe caminho-(u,w)

Componentes Conexas

Componentes Conexas

- É possível particionar G em classes de equivalência: V_1, V_2, ..., V_p tal que dois vértices são conectados se e somente se pertence a um mesmo V_i

Componentes Conexas

- É possível particionar G em classes de equivalência: $V_1, V_2, \ldots, V_p$ tal que dois vértices são conectados se e somente se pertence a um mesmo V_i
- Os subgrafos $G[V_1], \ldots, G[V_p]$ são chamados de componentes conexas de G.

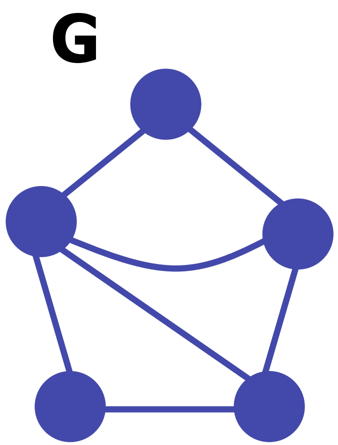
Maximal (Minimal)

- $G' \subseteq G$ é maximal em relação a uma propriedade π se não houver $G'' \subseteq G'$ tal que G'' tem a propriedade π.

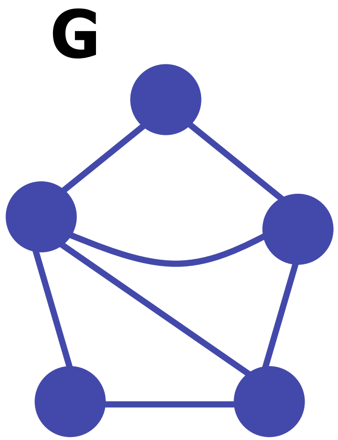
Maximal (Minimal)

- $G' \subseteq G$ é maximal em relação a uma propriedade π se não houver $G'' \subseteq G'$ tal que G'' tem a propriedade π.
  - Componentes conexas: são todos os subgrafos conexos maximais de G.

Exemplo

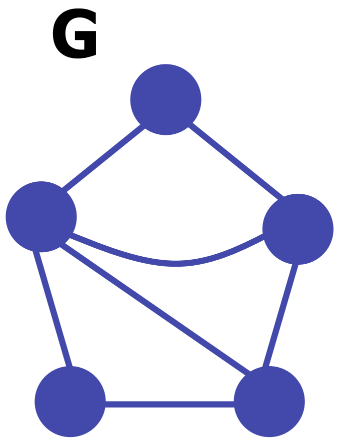


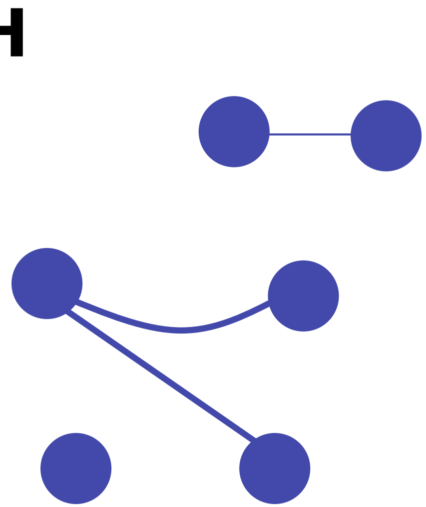
Exemplo



G é Conexo

Exemplo

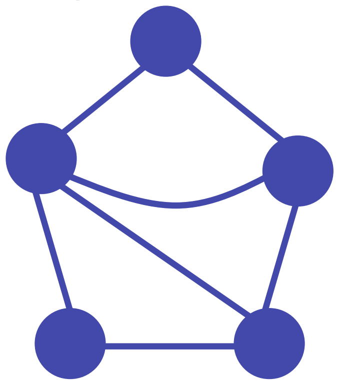




G é Conexo

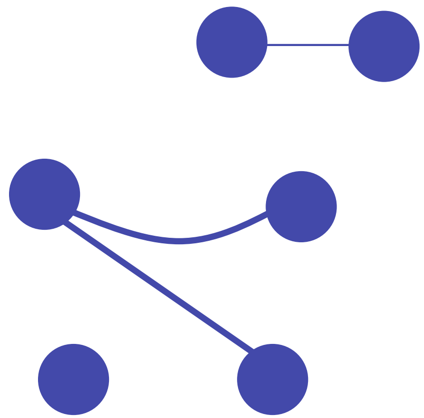
Exemplo

G



G é Conexo

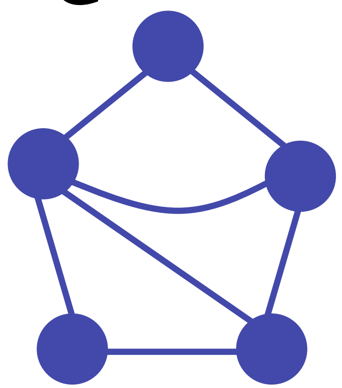
H



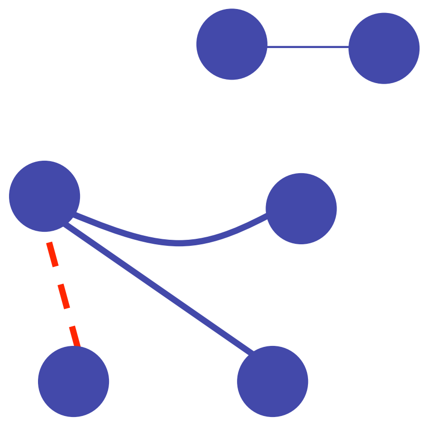
H é desconexo

Exemplo

G



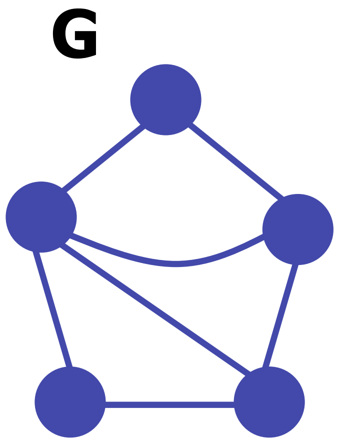
H



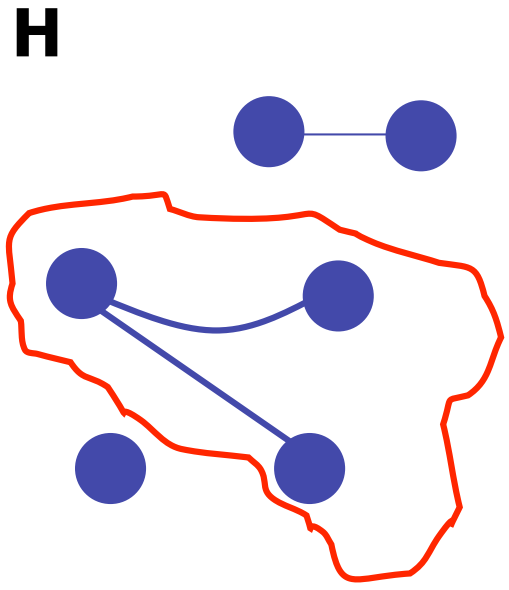
G é Conexo

H é desconexo

Exemplo

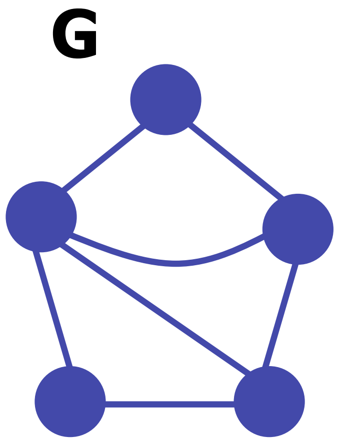


G é Conexo

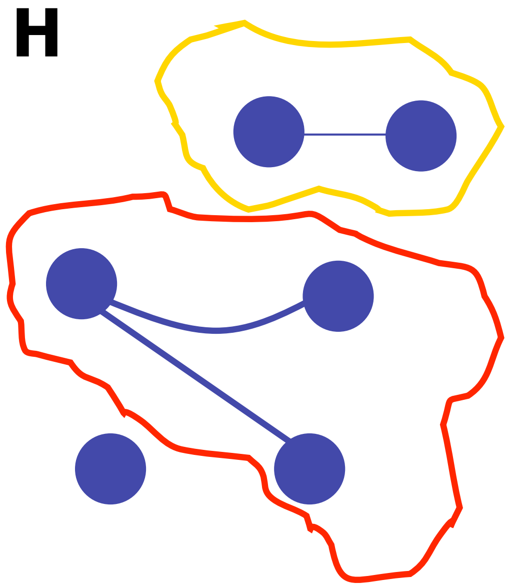


H é desconexo

Exemplo

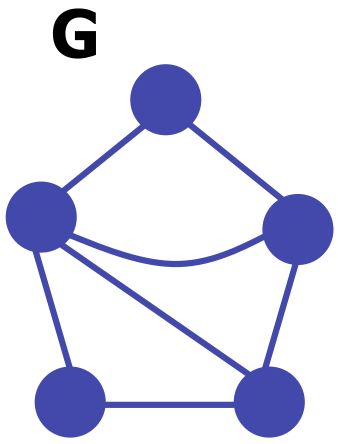


G é Conexo

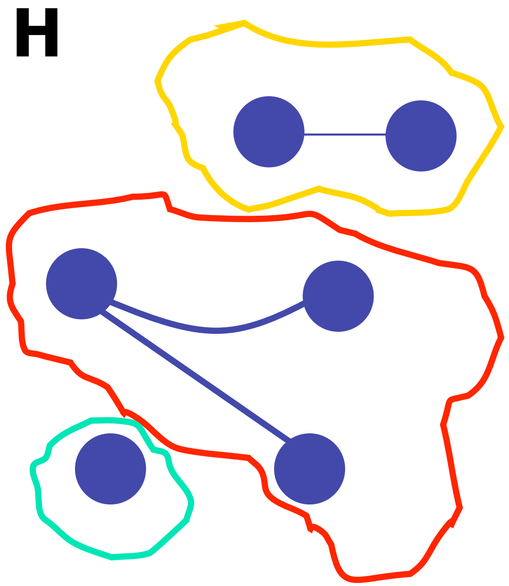


H é desconexo

Exemplo

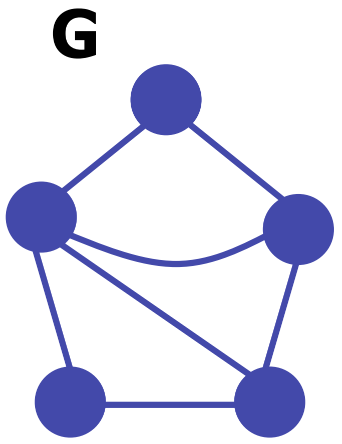


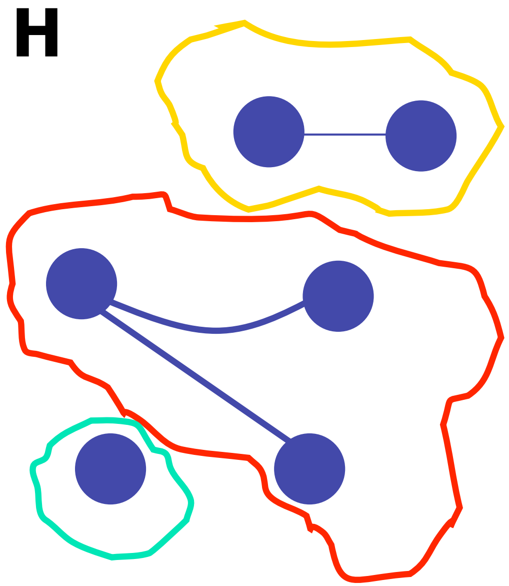
G é Conexo



H é desconexo

Exemplo





G é Conexo

H é desconexo

ω**(G)**= número de componentes conexas de G

Ciclo

- Uma sequência $v_1, v_2, ..., v_p, v_1$ é um ciclo em G se $v_1, v_2, ..., v_p$ é um caminho em G.

Ciclo

- Uma sequência $v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1$ é um ciclo em G se $v_1, v_2, \ldots, v_p$ é um caminho em G.
- k-ciclo : um ciclo de tamanho k

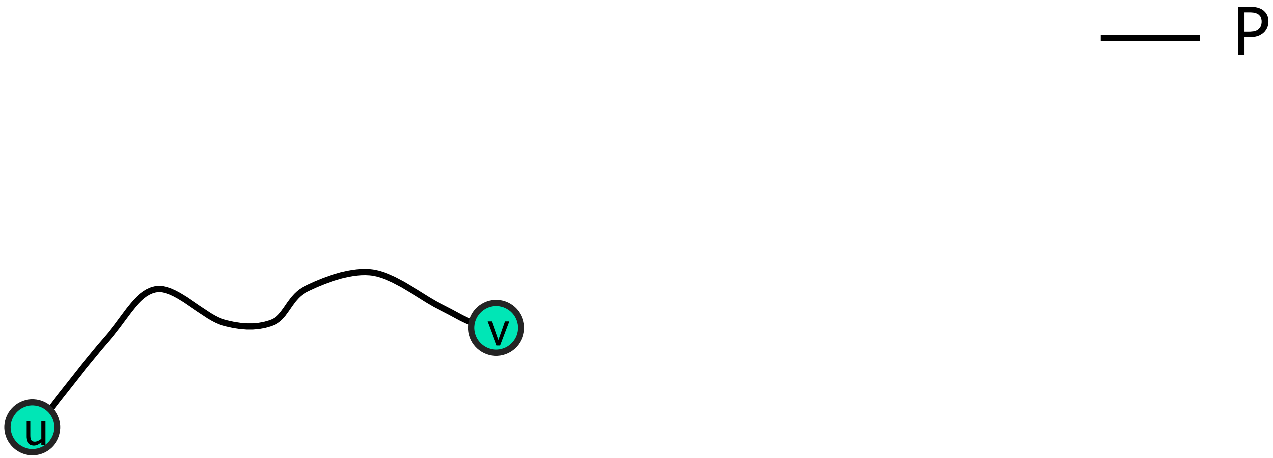
Ciclo

- Uma sequência $v_1, v_2, ..., v_p, v_1$ é um ciclo em G se $v_1, v_2, ..., v_p$ é um caminho em G.
- k-ciclo : um ciclo de tamanho k
  - 3-ciclo: triângulo

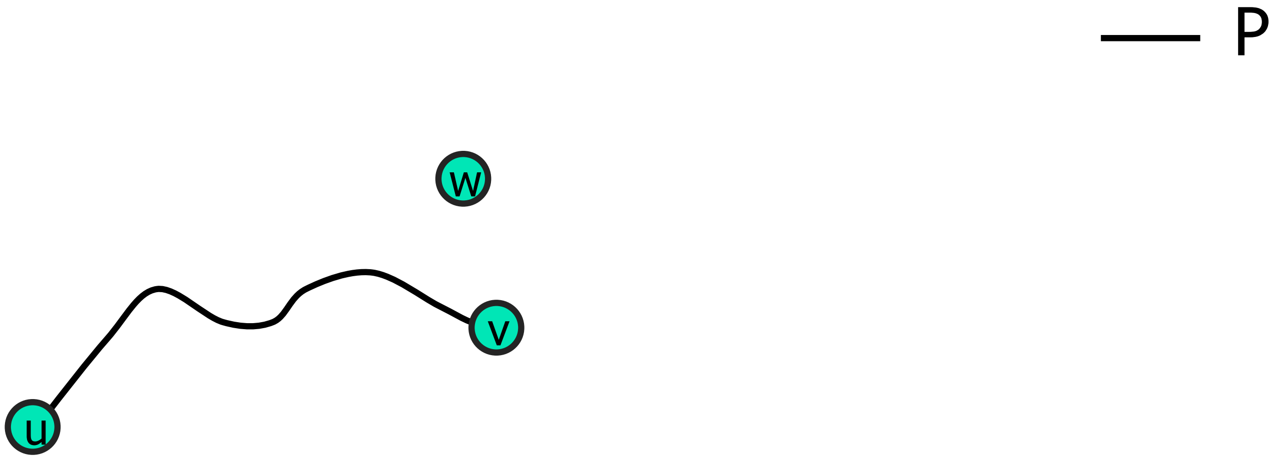
Teorema: Um grafo G é bipartido se e somente se não contém ciclo ímpar

$(\Leftarrow)$

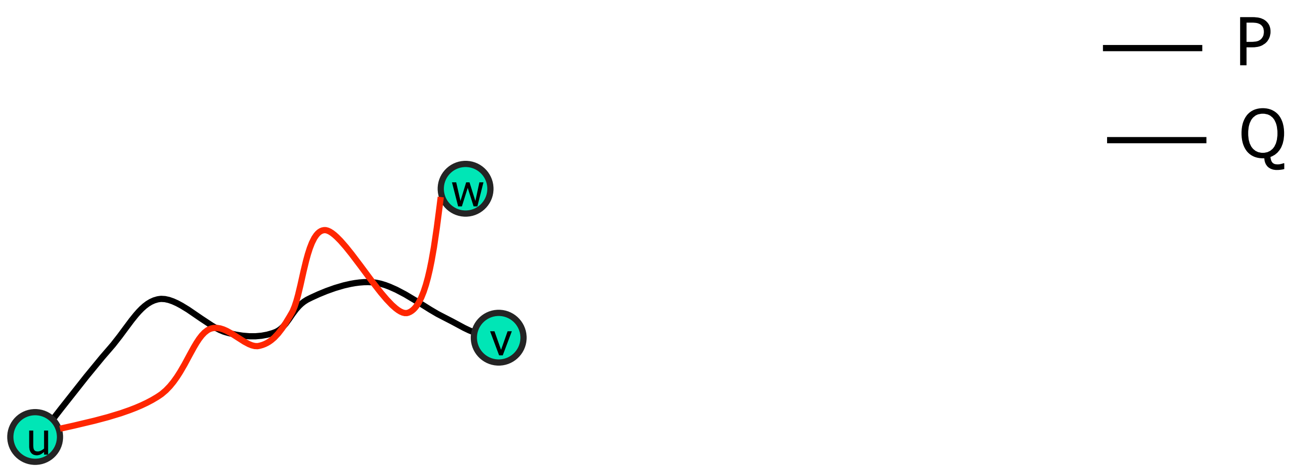
($\Leftarrow$)



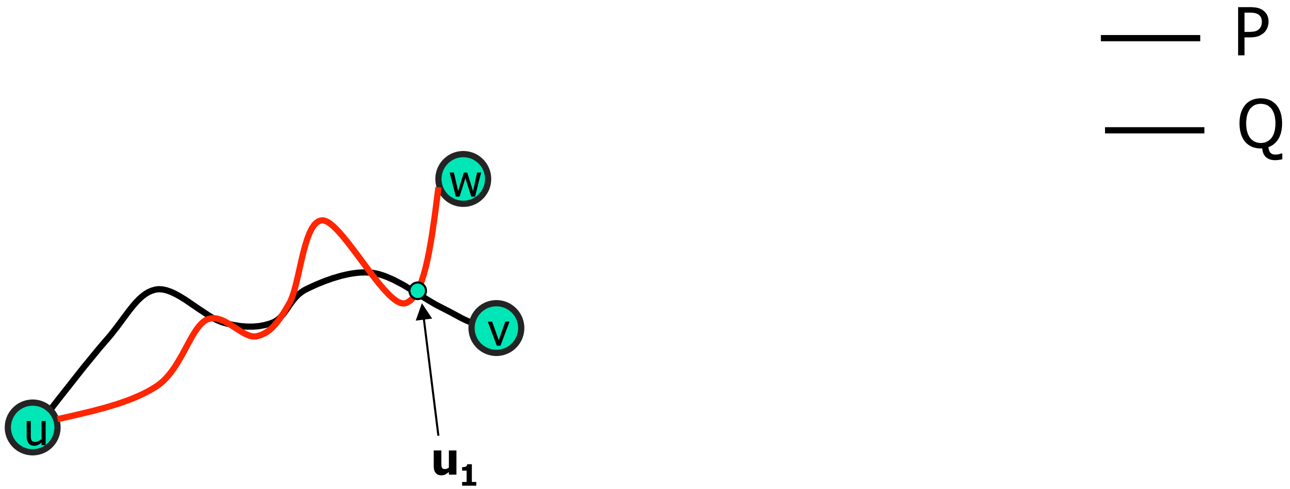
$(\Leftarrow)$



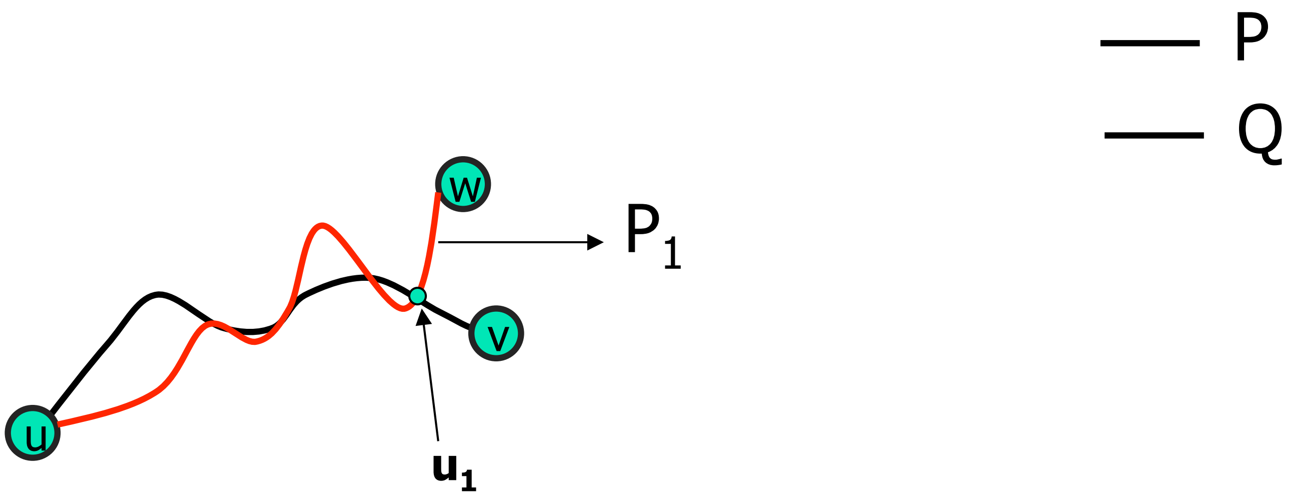
$(\Leftarrow)$



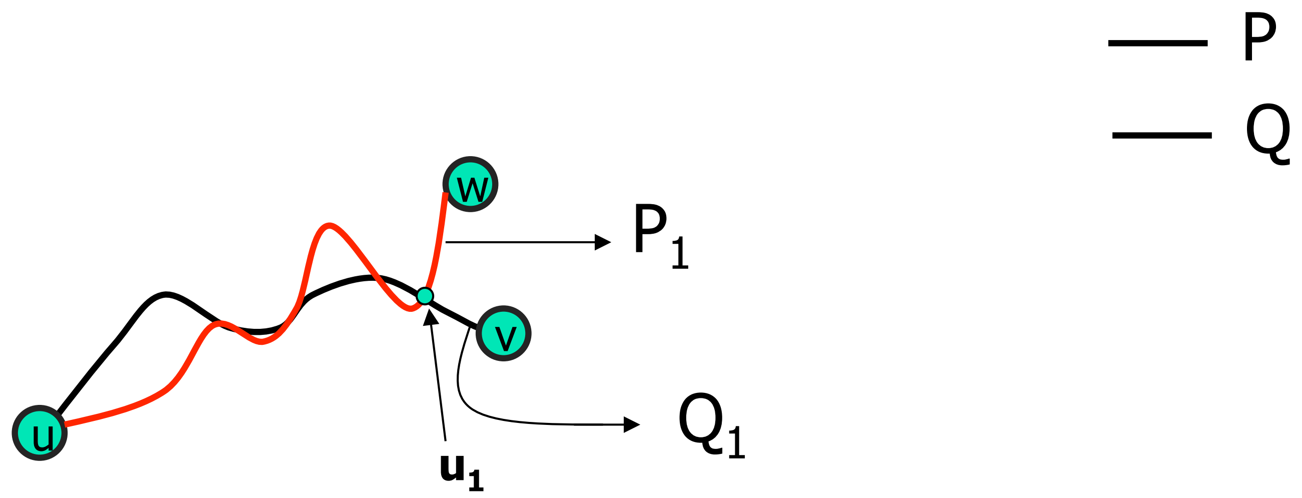
$(\Leftarrow)$



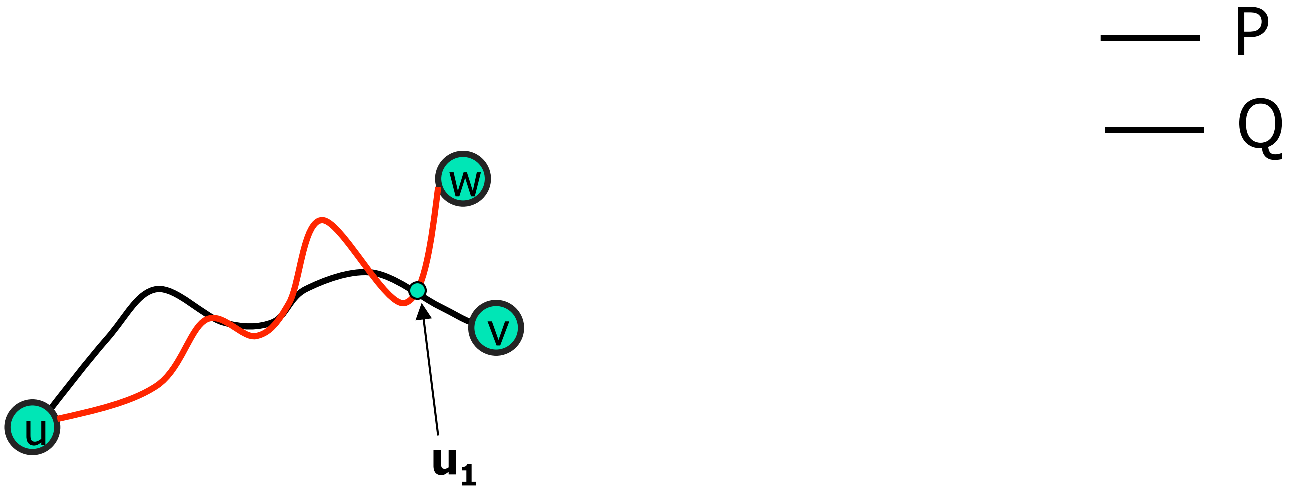
$(\Leftarrow)$



($\Leftarrow$)



$(\Leftarrow)$



$(\Leftarrow)$