# Análise Projeto de Algoritmos

Loana Tito Nogueira

Setembro 2016

# Árvores de Decisão

- O conhecimento de limites inferiores para um problema algorítmico é um dado essencial para que se possa avaliar a dificuldade de resolver o problema.

- Uma técnica utilizada que permite o cálculo de limites inferiores dá-se através das árvores de decisão.

# Árvores de Decisão

- O conhecimento de limites inferiores para um problema algorítmico é um dado essencial para que se possa avaliar a dificuldade de resolver o problema.

- Uma técnica utilizada que permite o cálculo de limites inferiores dá-se através das árvores de decisão.

- Ex.: Vamos utilizar a técnica no Problema de ordenação

# Árvores de Decisão

- Seja P um problema e α um algoritmo que resolve P, de tal modo que a operação dominante em α seja a comparação. Isto é, o número de comparações que α executa no processo exprime sua complexidade.

- Cada comparação é de natureza binária: admite exatamente 2 alternativas como resposta.

- A técnica seguinte se destina a determinar um limite inferior para as complexidades que α pode apresentar.

# Árvores de Decisão

- O efeito das comparações em um cálculo de $\alpha$ pode ser modelado através de uma <u>árvore estritamente binária</u> T (Árvore de Decisão)

Cada nó interno possui exatamente 2 filhos

# Árvores de Decisão

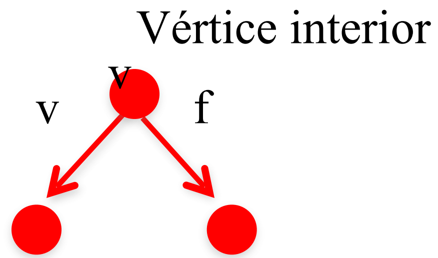
- Cada comparação C efetuada no processo é univocamente representada por um vértice interior v de T

# Árvores de Decisão

- Cada comparação C efetuada no processo é univocamente representada por um vértice interior v de T

# Árvores de Decisão

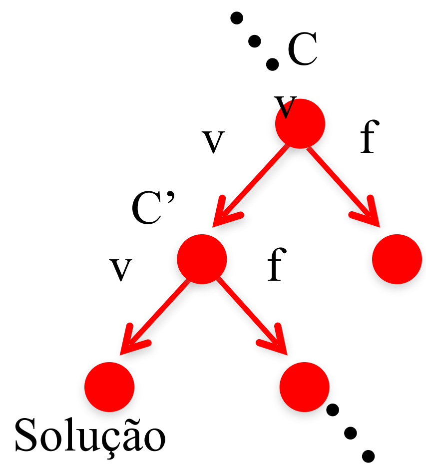
- Cada comparação C efetuada no processo é univocamente representada por um vértice interior v de T




- Os filhos esquerdo e direito correspondem às alternativas (V) ou (F) do resultado de C (que depende da entrada de α)

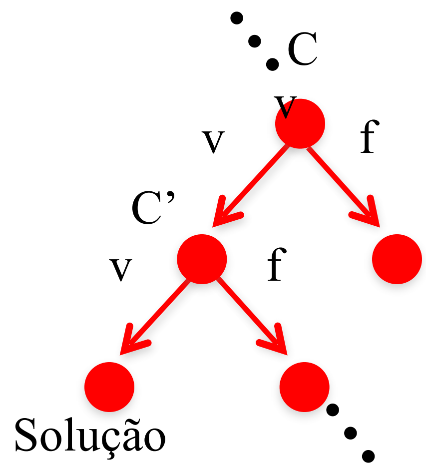
# Árvores de Decisão

- Um resultado verdadeiro de C, por exemplo, conduz α a uma nova comparação C', representada em T pelo filho esquerdo de v.
- Os 2 filhos de C' correspondem por sua vez, respectivamente, às alternativas do resultado de C', e assim por diante.



# Árvores de Decisão

- Um resultado verdadeiro de C, por exemplo, conduz α a uma nova comparação C', representada em T pelo filho esquerdo de v.
- Os 2 filhos de C' correspondem por sua vez, respectivamente, às alternativas do resultado de C', e assim por diante.

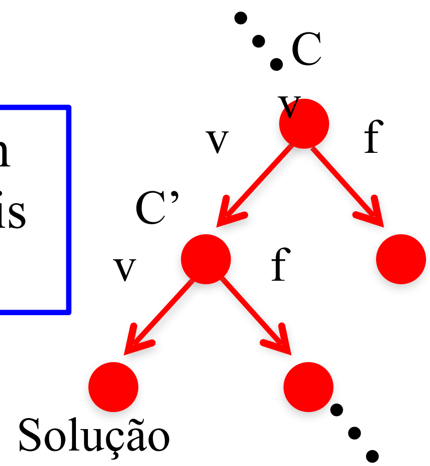



A árvore T contém todas as alternativas do processo, para todas as entradas possíveis de α

# Árvores de Decisão

- Um resultado verdadeiro de C, por exemplo, conduz α a uma nova comparação C’, representada em T pelo filho esquerdo de v.
- Os 2 filhos de C’ correspondem por sua vez, respectivamente, às alternativas do resultado de C’, e assim por diante.

As folhas de T correspodem ao conjunto de estados finais a que α pode conduzir




A árvore T contém todas as alternativas do processo, para todas as entradas possíveis de α

# Árvores de Decisão

- Cada possível saída diferente de $\alpha$ deve corresponder a pelo menos uma folha diferente de T.

# Árvores de Decisão

- Cada possível saída diferente de α deve corresponder a pelo menos uma folha diferente de T.

⬇

- O comprimento do caminho em T desde a raiz até uma folha é igual ao número de comparações efetuadas por α para uma certa entrada E.

# Árvores de Decisão

- Cada possível saída diferente de α deve corresponder a pelo menos uma folha diferente de T.

- O comprimento do caminho em T desde a raiz até uma folha é igual ao número de comparações efetuadas por α para uma certa entrada E.

A altura de T é igual ao número de comparações que α efetua no pior caso (ou seja, é a complex.de α.

# Árvores de Decisão

- Como decorrência, um limite inferior para a altura de T é também um limite inferior para P.
- h: altura mínima dentre as árvores de decisão correspondentes a todos os algoritmos que resolvem P.
- O limite inferior máximo de P é igual a h.

# Limite Inferior para Ordenação

- Seja $\alpha$ um algoritmo de ordenação e cuja entrada é S.

- Seja T a árvore de decisão de altura h, correspondente a $\alpha$. O número de folhas de T é $\geq n!$, pois a saída de $\alpha$ pode corresponder a qualquer permutação de sua entrada.

- Logo, T possui no máximo $2^h$ folhas, pois T é uma árvore binária. Sendo assim, ....

# Limite Inferior para Ordenação

- Seja α um algoritmo de ordenação e cuja entrada é S.

- Seja T a árvore de decisão de altura h, correspondente a α. O número de folhas de T é ≥ n!, pois a saída de α pode corresponder a qualquer permutação de sua entrada.

- Logo, T possui no máximo $2^h$ folhas, pois T é uma árvore binária. Sendo assim, ....

$$2^h \geq n! \qquad h \geq \log(n!) \quad \text{(já que n>0)}$$

$$n! = n(n-1).(n-2)...(1) \geq n(n-1)...(n/2) > (n/2)^{n/2}$$

# Limite Inferior para Ordenação

- $h > n/2 (\log n - 1)$
  - Portanto, O (n log n ) é um limite inferior para o problema de Ordenação.