Análise e Síntese de Algoritmos

Loana Tito Nogueira

E-mail: loana@ic.uff.br

12-março-2012

Lógica Matemática – Lógica de Predicados de 1ª. Ordem

- ***Princípios:***

1- Princípio da Não Contradição

2- Princípio do 3º. Excluído

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

- ***PROPOSIÇÃO***

> ***Sentenças declarativas afirmativas (expressão de uma linguagem) da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa.·***

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

- ***PROPOSIÇÃO***

> ***Sentenças declarativas afirmativas (expressão de uma linguagem) da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa.·***

Ex.:

- ***A lua é quadrada***
- ***A neve é branca.***
- ***João***

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

- ***PROPOSIÇÃO***

> ***Sentenças declarativas afirmativas (expressão de uma linguagem) da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa.·***

Ex.:

- ***A lua é quadrada***
- ***A neve é branca.***
- ***João (não é uma proposição)***

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS*: letras latinas minúsculas p,q,r,s,.... para indicar as proposições (fórmulas atômicas) .**

Exemplos: ***A lua é quadrada : p***

A neve é branca : q

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***CONECTIVOS LÓGICOS**: As fórmulas atômicas podem ser combinadas entre si e, para representar tais combinações usaremos os conectivos lógicos:*

$\wedge$: *e*

$\vee$: *ou*

$\rightarrow$: *se … então*

$\leftrightarrow$: *se e somente se*

$\neg$: *não*

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***Exemplos*:**

- ***A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$***

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***Exemplos*:**

- ***A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$***
- ***A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$***

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***Exemplos*:**

- ***A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$***
- ***A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$***
- ***Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$***

  (p é o antecedente e q o conseqüente)

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***Exemplos*:**

- ***A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$***
- ***A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$***
- ***Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$***

  (p é o antecedente e q o conseqüente)
- ***A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :***

  $p \leftrightarrow q$

Lógica Matemática – Cáculo Proposicional

***Exemplos*:**

- ***A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$***
- ***A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$***
- ***Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$***

  (p é o antecedente e q o conseqüente)
- ***A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :***

  $p \leftrightarrow q$
- ***A lua não é quadrada. : $\sim p$***

Fórmulas

1. *Toda fórmula atômica é uma fórmula.*

2. *Se A e B são fórmulas então*
   $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ e $(\sim A)$ também são fórmulas.

1. *São fórmulas apenas as obtidas por 1. e 2. .*

Tabela Verdade

- **A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:**

1- Princípio da Não Contradição

2- Princípio do 3º. Excluído

Tabela Verdade

- **A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:**

Uma proposição pode assumir apenas dois valores: verdadeiro ou falso, excluíndo um 3o. Valor.

2- Princípio do 3º. Excluído

Tabela Verdade

- **A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:**

> ***Uma proposição pode assumir apenas dois valores: verdadeiro ou falso, excluíndo um 3o. Valor.***

> ***Uma proposição não pode assumir valor verdadeiro e falso ao mesmo tempo***

Tabela Verdade

- A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:

Princípio do Terceiro Excluído: ***uma proposição pode assumir apenas dois valores: verdadeiro ou falso, excluíndo um 3o. Valor.***

Princípio da Contradição**: uma proposição não pode assumir valor verdadeiro e falso ao mesmo tempo·**

Tabelas Verdade

- Com base nesses princípios as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas - sendo mutuamente exclusivos os dois casos; daí dizer que a lógica clássica é bivalente

- Para determinar o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas (moleculares), conhecidos os valores das proposições simples (atômicas) que as compõem usaremos tabelas-verdade

Tabelas Verdade

- Com base nesses princípios as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas - sendo mutuamente exclusivos os dois casos; daí dizer que a lógica clássica é bivalente

- Para determinar o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas (moleculares), conhecidos os valores das proposições simples (atômicas) que as compõem usaremos tabelas-verdade

NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

Cada proposição simples (atômica) tem dois valores V ou F, que se excluem.

n fórmulas atômicas distintas

número de linhas da tabela verdade é 2^n

Assim, para duas proposições são $2^2 = 4$ linhas; para 3 proposições são $2^3 = 8$; etc.

Técnicas de Demonstração

O que é uma demonstração?

- É a maneira pela qual uma proposição é validada através de argumentos formais.

Técnicas de Demonstração

- Na ciência da computação uma demonstração pode ser utilizada para se ter certeza de que um determinado algoritmo funciona de acordo com sua especificação.

Como exemplo de algoritmos que foram validados utilizando-se argumentos formais, podemos citar:

- Algoritmos de ordenação
- Algoritmos de busca em bases de dados
- Algoritmos para árvore geradora mínima
- Algoritmos de compressão de dados

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese:
  - 2.Tese:

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese: Onde podem-se encontrar as informações conhecidas sobre o teorema.
    - Essas informações são tomadas como verdadeiras a fim de se tentar obter uma demonstração.
  - 2.Tese:

Teorema

- O objeto básico de uma demonstração é a proposição que desejamos demonstrar. Essa proposição recebe o nome de teorema.
- Um teorema é dividido em duas partes:
  - 1.Hipótese: Onde podem-se encontrar as informações conhecidas sobre o teorema.
    - Essas informações são tomadas como verdadeiras a fim de se tentar obter uma demonstração.
  - 2.Tese: É a parte do teorema que desejamos validar. A partir da hipótese, utilizando-se uma sequência de argumentos formais, buscamos uma demonstração para a tese.

Teorema

- Dessa forma o teorema pode ser escrito como a seguinte implicação lógica:

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \text{Tese}$$

Lema e Corolário

- Em algumas circunstâncias os teoremas recebem nomes especiais.

Quando um teorema é utilizado como parte da demonstração de um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **lema**.

Lema e Corolário

- Em algumas circunstâncias os teoremas recebem nomes especiais.

Quando um teorema é utilizado como parte da demonstração de um outro teorema, em geral mais complexo, ele recebe o nome de **lema**.

Quando um teorema é uma consequência imediata de outro, ele recebe o nome de corolário

Exemplo

- Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

Exemplo

- Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

- Corolário 1: Cada ângulo de um triângulo equilátero vale 60 graus.

Técnicas de Demonstração

- A **demonstração direta** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos (implicações):

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_n = q,$$

Que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

Cada passo da demonstração é um axioma ou teorema provado previamente

Exemplo: Provar que $\Sigma_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

- Dica: Utilizar as propriedades de somatório

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$
- A contrapositiva é equivalente à implicação original.

A veracidade de $\sim q \Rightarrow \sim p$ implica a veracidade de $p \Rightarrow q$, e vice-versa.

Demonstração por Contrapositiva

- A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$ é $\sim q \Rightarrow \sim p$
- A contrapositiva é equivalente à implicação original.

A veracidade de $\sim q \Rightarrow \sim p$ implica a veracidade de $p \Rightarrow q$, e vice-versa.

- A técnica é útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva do que a implicação original
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração

Exemplo: Prove que se 2|3m então 2|m

Demonstração por contradição

- A Demonstração por **contradição** envolve supor absurdamente que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obter, através de implicações válidas, uma conclusão contraditória.
- A contradição obtida implica que a hipótese absurdo é falsa e, portanto, a afirmação é de fato verdadeira.

- No caso de uma implicação $p \Rightarrow q$, equivalente a $\sim p \vee q$, a negação é $p \wedge \sim q$

Exemplo: Seja A um conjunto, prove que $\varnothing \subseteq A$, qualquer que seja A

Exemplo: Seja A um conjunto, prove que $\varnothing \subseteq A$, qualquer que seja A

- Por contradição e utilizando a definição de subconjunto

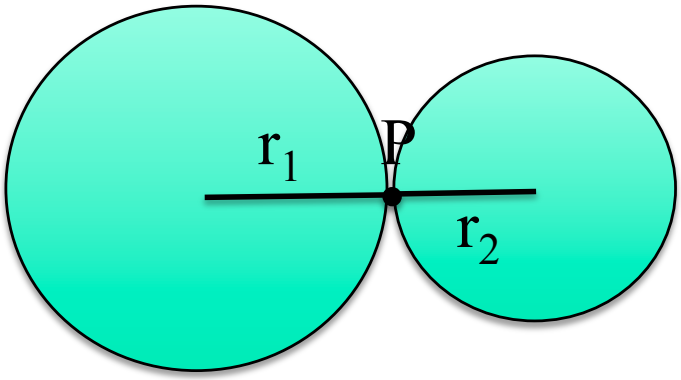
Exemplo2: Prove que o maior inteiro que divide ambos n e n+1 é 1

Exercícios

- 1- Prove que o conjunto dos números primos é infinito
- 2- Prove que é um número irracional.
- 3- Sejam dois círculos tangentes C1 e C2 com respectivos raios r1 e r2 , tais que r1 é um número racional e r2 irracional.

  Inicialmente os círculos estão parados com os pontos P1 do círculo C1 e P2 do círculo C2 coincidentes. Logo após o instante inicial, os círculos C1 e C2 começam um movimento uniforme de rotação sem deslizamento. Prove que, uma vez o movimento iniciado, os pontos P1 e P2 nunca mais serão coincidentes novamente.

Exercícios



Demonstração por Casos

- Na demonstração por casos, particionamos o universo de possibilidades em um conjunto finito de casos e demonstramos a veracidade da implicação para cada caso

Demonstração por Casos

- Na demonstração por casos, particionamos o universo de possibilidades em um conjunto finito de casos e demonstramos a veracidade da implicação para cada caso

- Para demonstrar cada caso individual, qualquer técnica de demonstração pode ser utilizada

Exemplo: Mostre que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par