Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria da Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito (algumas ideias de respostas) da Lista 4 – LLC's

1. Mostre que nenhuma das linguagens abaixo é livre do contexto usando o lema do bombeamento.

   (a) Conjunto das palavras em $\{a, b, c\}^*$ que têm o mesmo número de a's e b's e cujo número de c's é maior ou igual que o de a's.

   Resposta: Considere $w = a^p b^p c^p$. Continuação análoga ao que fizemos na aula 13 sobre a linguagem $a^n b^n c^n$. A única consideração a mais que deve ser feita é ao tratar as possíveis decomposições de w deve obter palavras que bombeando (pra cima ou pra baixo) gera alguma palavra fora da linguagem tornando subcadeia de a's maior do que de c's ou tornando cadeia de c' menor do que subcadeia de a's.

   (b) $\{0^n 1^n 0^n \ : \ n \geq 0\}$.

   Resposta: Considere $w = 0^p 1^p 0^p$. Continuação análoga ao que fizemos na aula 13 sobre a linguagem $a^n b^n c^n$.

   (c) $\{w\#t \ : \ w$ é uma subpalavra de t, e $w, t, \in \{a, b\}^*\}$.

   Resposta: Suponha que esta linguagem seja LLC e portanto, satisfaça o lema do bombeamento. Considere $s = a^p b^p \# a^p b^p$.

   Note que em nenhuma decomposição de s, v nem y podem conter $\#$, caso contrário, uv^0xy^0z não contém $\#$ e, portanto, não está na linguagem.

   Se ambos v e y ocorrem no lado esquerdo de $\#$, a palavra uv^2xy^2z não pertence a linguagem, pois a parte a esquerda de $\#$ é mais longa do que a parte a direita, e assim, w não é subcadeia de t.

   Da mesma forma, se as duas cadeias ocorrerem no lado direito do $\#$, a cadeia uv^0xy^0z não pertence a linguagem, pois, novamente, a cadeia do lado esquerdo de $\#$ é mais longa do que a do lado direito de $\#$.

   Se um de v e y estiver vazio (ambos não podem estar vazios), trate-os como se ambos tivessem ocorrido no mesmo lado do $\#$ anterior.

   O único caso restante é onde v e y são não-vazios e $\#$ está entre eles. Assim, v consiste em b e y consiste em a por causa da terceira condição de lema de bombeamento $|vxy| \leq p$. Portanto, uv^2xy^2z contém mais b's no lado esquerdo do $\#$. Portanto, não pertence a linguagem.

(d) $\{0^{n!} \ : \ n \geq 1\}$.

Resposta: Suponha, por absurdo, que L seja LLC. Tome $w = 0^{p!}$. Como $p! \geq p$, então existe uma decomposição de $w = uvxyz$ que satisfaz o lema.

Tome $uv^2xy^2z \in L$, ou seja, $|uv^2xy^2z| = q!$ para algum inteiro q. Daí temos que: $q! - p! = |uv^2xy^2z| - |uvxyz| = |vy| > 0$.

Da mesma forma, $|uv^3xy^3z| = r!$ para algum inteiro r. Daí temos que: $|uv^3xy^3z| - |uv^2xy^2z| = |vy| = r! - q!$

Daí, $r! = q! + |vy| = q! + (q! - p!) = 2q! - p!$ Como $q \geq 1$, então $q + 1 \geq 2$, e portanto: $2q! \leq (q+1)q! = (q+1)!$

Daí, $r! = 2q! - p! \leq (q+1)! - p! < (q+1)!$ Ou seja, $r! < (q+1)!$.

Como $r! = q! + |vy|$, com $|vy| > 0$, então temos que $q! < r! < (q+1)!$. Como r é um inteiro e $q < r < q+1$, temos um absurdo.

2. Considere a linguagem: $L = \{ww \ : \ w \in \{a,b\}^*\}$.

(a) Exiba uma palavra s de L tal que haja uma decomposição tal que toda palavra bombeada (pelo lema do bombeamento para LLC) de s pertença a L.

Resposta: $s = a^p 1 a^p 1$. Note que existe uma decomposição em que toda palavra bombeada pertence a L. Basta considerar uma decomposição em que x seja igual ao primeiro 1 de s.

(b) A palavra obtida no item a) implica uma condição suficiente para que L seja livre do contexto? Justifique.

Resposta: Não implica, isso porque no item a) só exibimos uma palavra que satisfaz o lema. Mesmo que todas as palavras de L satisfizessem o lema não teríamos que L fosse LLC. O lema do bombeamento é útil para mostrar quando uma linguagem não é LLC ao exibir uma palavra que não satisfaça o lema para nenhuma decomposição dela.

(c) Caso L não seja LLC, mostre isso usando o Lema do Bombeamento.

Resposta: Demonstração comentada na aula 14 e resolução similar a feita na questão 1c. Uma possível palavra a ser considerada é $0^p1^p0^p1^p$.

3. Determine um autômato com pilha que reconhece as seguintes linguagens:

(a) $\{a^nb^{n+1} \ : \ n \geq 0\}$

Resposta (ideia): Pense de modo similar ao feito para reconhecer a^nb^n. Uma alteração possível para fazer reconhecer essa nova linguagem é ao iniciar a computação, ao invés de empilhar \$, empilhe $a\$$. Dessa forma, todos os b's deverão ser casados com todos os a's que estiverem na pilha.

(b) $\{a^nb^{2n} \ : \ n \geq 0\}$

Resposta (ideia): Pense de modo similar ao feito para reconhecer a^nb^n. Uma alteração possível para fazer reconhecer essa nova linguagem é ao ler um a, então empilha dois a's.

(c) $\{w \in \{a,b\}^* \;:\; \text{o número de } a's \text{ é diferente do de } b's\}$

Resposta (ideia): Pense de modo similar ao feito em aula para reconhecer w tal que número de a's é igual ao número de b's. Uma alteração possível é se ao terminar a leitura da palavra estiver vendo \$ no topo da pilha, então leve para um estado que não seja final.

(d) $\{a^n b^m \;:\; m, n \geq 0 \text{ e } m \neq n\}$.

Resposta (ideia): Autômato visto na Figura 1.

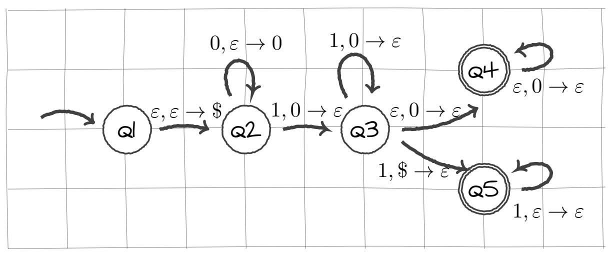

Figura 1: Autômato do Exercício 3d.

4. Determine um autômato de pilha que aceita a linguagem gerada pela gramática cujas regras são:

$$\begin{aligned} S \to &\quad 0AA \\ A \to &\quad 1S \mid 0S \mid 0 \end{aligned}$$

Resposta (ideia): Faça tal como o algoritmo proposto na Aula 12. Reveja a explicação no exemplo da aula se ajudar. Figura 2 exibe uma ideia.

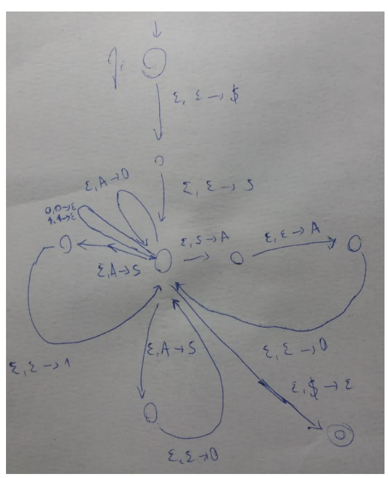

Figura 2: Autômato do Exercício 4 (preguiça de passar pro computador, foi mal aí).

5. Construa uma gramática livre do contexto que gera cada linguagem abaixo e construa um autômato com pilha que a aceite.

(a) $\{wc^4w^R \ : \ w \in \{0,1\}^*\}$

Resposta (ideia): $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid cccc$. Autômato com pilha pode ser obtido tal como visto na questão 4.

Outra ideia seria primeiro obter um autômato de pilha e depois usar a conversão vista na Aula 12 para obter uma gramática equivalente.

(b) $\{a^{i+3}b^{2i+1} \ : \ i \geq 0\}$

Resposta (ideia): $S \to aSbb \mid aaab$. Autômato com pilha pode ser obtido tal como visto na questão 4.

Outra ideia seria primeiro obter um autômato de pilha e depois usar a conversão vista na Aula 12 para obter uma gramática equivalente.