Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria da Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito da Lista 3 – GR e Lema do bombeamento

1. Obtenha uma gramática regular que gera as seguintes expressões regulares com alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

   (a) $(0(0)^*1)^*$.

   (b) $0^*1^*0^+$.

   (c) $(0^*1) \cup (1^*0)$.

   Resposta: Construtiva. Reveja construção indutiva vista em aula.

2. Obtenha as gramáticas regulares das seguintes linguagens regulares com alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

   (a) $\{w \mid w$ tem pelo menos três as e pelo menos dois bs$\}$.

   (b) $\{w \mid w$ tem um número par de as cada a é seguido por pelo menos um $b\}$.

   (c) $\{w \mid w$ não contém a subcadeia $ab\}$.

   (d) $\{w \mid w$ não contém a subcadeia $baba\}$.

   (e) $\{w \mid w$ termina com $aa\}$.

   Resposta: Construtiva. Obtenha AFD de cada linguagem e transforme na GR associada. Se for mais fácil, obtenha uma AFN, depois obtenha a AFD associada e siga tal como anteriormente.

3. Considere a seguinte linguagem $L = \{0^m 1^n : m \neq n\}$.

(a) Exiba os erros do seguinte argumento para mostrar que L não é regular: *Suponha que* $L = \{0^m 1^n\}$ *seja regular e considere a cadeia* $w = 0^p 1^{p-1}$, *onde p é o comprimento do bombeamento. Como* $|xy| \leq p$, *y é uma cadeia de zeros. Sejam* $x = 0^r$, $y = 0$, $z = 0^{p-r-1}1^{p-1}$. *Note que, para* $i = 0$, *temos que* xy^0z *não pertence a L. Logo, L não é regular.*

Resposta: Essa decomposição mostrada $w = xyz$ não garante que não haja alguma outra de modo a tornar possível o bombeamento.

Por exemplo, se tomássemos a decomposição $x = 0^r$, $y = 0^2$, $z = 0^{p-r-2}1^{p-1}$, teríamos que qualquer palavra obtida pelo bombeamento seria pertencente a L. Podemos ver isso da seguinte forma: $w' = 0^r 0^{2i} 0^{p-r-2} 1^{p-1}$. Como a potência de 0 deve ser diferente da potência de 1 para que a w' pertença a L, podemos verificar isso diretamente, pois: $w' = 0^{r+2i+p-r-2}1^{p-1} = 0^{p+2(i-1)}1^{p-1} = 0^{p-2(1-i)}1^{p-1}$. Assim, para que nessa decomposição alguma palavra gerada pelo bombeamento não seja pertencente a L, teríamos que $2(i-1) = 1$. Como i é um inteiro não negativo, temos que não existe i tal que w' não seja palavra de L, portanto 0^p1^{p-1} satisfaz o lema do bombeamento.

(b) Mostre que L não é regular aplicando o lema do bombeamento.

Resposta: Assuma que L seja regular e seja p o comprimento do bombeamento. Observe que $p!$ é divisível por todos inteiros de 1 até p, pois $p! = 1.2.3.\cdots.(p-2)(p-1)p$, ou seja, $p!$ é múltiplo de cada um desses inteiros.

Assuma que $w = 0^p 1^{p+p!}$ e que L seja regular. Note que $w \in L$ pois $p \neq p + p!$ e além disso, $|w| \geq p$. Assim, pelo lema do bombeamento, $w = xyz$, tal que: $x = 0^a$, $y = 0^b$ e $z = 0^c 1^{p+p!}$ e $b > 0$ e $a + b + c = p$. Como assumimos que L é regular, então $xy^iz \in L$ pra qualquer valor de i. Dessa forma, tome $i = \frac{p!}{b}$. Assim, $y^i = 0^{\frac{p!}{b}b} = 0^{p!}$ e $y^{i+1} = 0^{p!}0^b = 0^{p!+b}$. Tomemos, agora, $w' = xy^{i+1}z$, temos que: $w' = 0^{a+b+c+p!}1^{p+p!}$. Como vimos que $a + b + c = p$, então $w' = 0^{p+p!}1^{p+p!}$ é uma palavra que não pertence a L, e portanto, L não é regular.

(c) Mostre que L não é regular usando propriedades de fechamento em linguagens regulares.

Resposta: Como o complemento de linguagem regular é regular, suponha que L seja regular, e dessa forma seu complemento também é. Como o complemento de L é $L' = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$ e sabemos que L' não é regular, como visto em aula, isso contradiz L ser regular.

4. Determine um autômato finito que reconheça a linguagem gerada pela seguinte gramática com as seguintes regras: $S \to 011X \mid 11S$, $X \to 101Y$, $Y \to 111$, onde S é a variável inicial. (Obs.: Note que | significa que S pode ser derivado para $011X$ ou para $11S$).

Resposta: Resolução construtiva. Só deve chamar atenção para qual alfabeto está considerando.

5. Use o lema do bombeamento para mostrar que as linguagens a seguir não são regulares.

(a) $A_1 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$.

Resposta: Similar ao exemplo visto em aula.

(b) $A_2 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$. ($a^{2^n}$ significa uma cadeia de 2^n a's).

Resposta: Suponha que A_2 seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como sendo a cadeia a^{2^p}. Como s é um membro de A_1 e s é maior que p, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as três condições do lema do bombeamento. A terceira condição nos diz que $|xy| \leq p$. Além disso, $p < 2^p$ e, portanto, $|y| < 2^p$. Consequentemente, $|xyyz| = |xyz| + |y| < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$. A segunda condição requer que $|y| > 1$. Portanto, $2^p < |xyyz| < 2^{p+1}$. O comprimento de $xyyz$ não pode ser uma potência de 2. Logo, $xyyz$ não é um membro de A_2, uma contradição. Consequentemente, A_2 não é regular.

6. Seja M um autômato finito determinístico com n estados e seja L a linguagem reconhecida por M. Mostre que se L contém uma palavra de comprimento maior ou igual que $2n$, então ela contém palavra de comprimento menor que $2n$.

Resposta: Como L é regular, então L satisfaz o lema do bombeamento. Ou seja, qualquer palavra de comprimento pelo menos n, existe uma decomposição em xyz tal que toda palavra xy^iz pertença a L, para qualquer valor de $i \geq 0$. Como L contém uma palavra w de comprimento pelo menos $2n$ e o AFD possui n estados, pelo princípio da casa dos pombos, existe pelo menos dois estados repetidos para a computação de w. Dessa forma, temos que $xy^0z \in L$, e $|xy^0z| < 2n$, pois $|xy^0z| = |xyz| - |y| = 2n - |y|$ e $|y| > 0$ como consequência do lema do bombeamento.