Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria da Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito da Lista de exercícios 2 – AFNs e Expressões Regulares

1. Dê diagramas de estado de AFNs com o número especificado de estados reconhecendo cada uma das linguagens a seguir. Em todos os casos, $\Sigma = \{0, 1\}$.

   (a) A linguagem $\{w \mid w \text{ termina com } 00\}$ com três estados.

   Resposta: Construtiva

   (b) A linguagem $0^*1^*0^+$ com três estados.

   Resposta: Construtiva

2. Mostre que todo AFN pode ser convertido em outro equivalente que possui apenas um único estado final.

   Resposta: Dado um AFN N, podemos construir um AFN N' da seguinte forma: Criamos um novo estado q_{aceita}; para cada estado final de N criamos uma transição ε para q_{aceita}; Todos estados finais de N deixam de ser estados finais de N'; estado q_{aceita} passa a ser estado final de N'. Por construção, temos que N' possui um único estado final, e além disso, N aceita uma palavra ℓ se, e somente se, N' aceita ℓ, como mostrado abaixo.

   Note que se N aceita ℓ então ℓ finaliza em algum estado final de N, com isso, em N', após chegar no estado de aceitação, podemos chegar em q_{aceita} pela transição ε, e assim, N' aceita ℓ. Por outro lado, se ℓ é aceita por N' então ℓ finalizou em q_{aceita}, e como, uma palavra só chegou até q_{aceita} se ela veio pela transição ε de algum estado final de N, então ℓ é aceita por N.

3. Seja A um AFD com um único estado final. Considere o AFN A' obtido invertendo os papéis dos estados inicial e final e invertendo também a direção de cada seta no diagrama de estado. Descreva $L(A')$ em termos de $L(A)$.

   Resposta (ideia da resposta): A' possui todas as palavras pela inversão de qualquer palavra aceita por A. Isso se deve a nova máquina começar pelo final da palavra que era aceita pela máquina anterior e fazermos a leitura da direita para a esquerda.

4. Seja B qualquer linguagem sobre o alfabeto Σ. Prove que $B = B^+$ se, e somente se, $BB \subseteq B$.

   Resposta: Primeiramente vamos mostrar que se $B = B^+$ então $BB \subseteq B$. Note que como $B = B^+$, então $BB = B^+B^+ = B^+ = B$. Assim, $BB \subseteq B$. Agora, vamos mostrar que se $BB \subseteq B$ então $B = B^+$. Note que todo elemento de BB é também elemento de B. Considere os elementos $x_1 \dots x_k \in B$. Como $x_1, x_2 \in B$ e $BB \subseteq B$, temos que $x_1x_2 \in B$. Similarmente, como x_1x_2 está em B e x_3 está em B, temos que $x_1x_2x_3 \in B$. Continuando dessa maneira, $x_1 \dots x_k \in B$. Portanto, $w \in B$ e, assim, podemos concluir que $B = B^+$.

5. Seja $\Sigma = \{a, b\}$, obtenha uma expressão regular equivalente da seguinte expressão $R : (ab \cup a)^*(a \cup b)(\emptyset \cup a)$.

   Resposta: Podemos reescrever R da seguinte forma:

   $R : (ab \cup a)^*(a \cup b)(\emptyset \cup a) = (ab \cup a)^*(a\emptyset \cup aa \cup b\emptyset \cup ba) = (ab \cup a)^*(aa \cup ba) =$
   $= (ab \cup a)^*aa \cup (ab \cup a)^*ba.$

6. Em relação a expressão regular R do item 5, podemos afirmar que ab é uma palavra da linguagem associada a ela? Justifique.

   Resposta: Apesar de ab poder ser subcadeia de alguma palavra de R (pois ab aparece em $(ab \cup a)$), a palavra ab não pode ser gerada por R. Isso se deve ao fato de haver uma concatenação entre $(ab \cup a)^*$ e aa ou ba. Portanto, só seria possível ter a palavra ab se após $(ab \cup a)^*$ houvesse a concatenação com ε.

7. Ainda em relação a expressão regular R do item 5, obtenha um AFN que associado a $L(R)$ através da construção indutiva e fechamento das expressões regulares.

   Resposta: Basta aplicar a construção indutiva da AFN associada a R, pode ser feito tanto pela expressão do enunciado do item 5, ou pelo modo equivalente de expressar R respondido no item 5.

8. Sejam as expressões regulares $R : (0 \cup \varepsilon)1^*$ e $R' : (0 \cup \Sigma)1^*$. Podemos afirmar que $R = R'$? Em caso positivo, mostre. Em caso negativo, exiba uma palavra que seja gerada por uma expressão mas não por outra.

   Resposta: $R \neq R'$. Tome ε, temos que $\varepsilon \in R$, mas $1 \notin R'$. Isso pode ser melhor visto ao reescrever $R : (0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$, e $R' : (0 \cup \Sigma)1^* = 01^* \cup \Sigma 1^*$. Note que $\varepsilon \in 1^*$, portanto, $\varepsilon \in R$. Porém, note que todas as palavras geradas por R' possuem tamanho pelo menos um, portanto $\varepsilon \notin R'$.

9. Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Obtenha linguagens para as seguintes expressões regulares:

   (a) $\Sigma(\Sigma\Sigma)^*$

   Resposta: $\Sigma(\Sigma\Sigma)^* = \{w | w \text{ possui comprimento ímpar}\}$.

(b) $(\Sigma\Sigma)^+ \cup 0^+$

Resposta: $(\Sigma\Sigma)^+ \cup 0^+ = \{w|w$ possui comprimento par positivo ou w é uma sequência arbitrária positiva de $0's\}$.

(c) $0\Sigma^*1$

Resposta: $0\Sigma^*1 = \{w|w$ possui comprimento pelo menos 2 e w começa por 0 e termina por $1\}$.

(d) Σ

Resposta: $\Sigma = \{0, 1\} = \{w|w = 0$ ou $w = 1\}$.

10. Considere o AFN da Figura 1 e responda os itens a seguir.

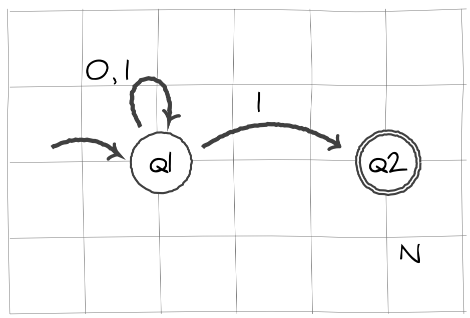

Figura 1: AFN do Exercício 10.

(a) Qual linguagem é reconhecida por este AFN?

Resposta: Note que em q_1 podemos ler qualquer palavra mantendo a leitura sempre no mesmo estado q_1. Além disso, o único estado de aceitação é q_2, que só pode ser alcançado com a leitura de 1, e após isto não pode haver mais símbolo do alfabeto a ser lido. Portanto, $L(N) = \{w|w$ termina com $1\}$.

(b) Transforme-o em um AFD usando o algoritmo de transformação de AFN em AFD visto em aula.

Resposta: Basta aplicar a construção de subconjuntos de AFN para AFD.

(c) Existe alguma outra forma de obter um AFD para essa linguagem? Qual?

Resposta: Sim. É possível obter o seguinte AFD: $Q = \{q_1, q_2\}$; $\Sigma = \{0, 1\}$; $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_2$, $\delta(q_2, 0) = q_1$, $\delta(q_2, 1) = q_2$; $F = \{q_2\}$; $q_0 = q_1$.

(d) Obtenha uma expressão regular para esta linguagem.

Resposta: A expressão regular pode ser obtida pelo algoritmo de substituição visto em aula (algoritmo de Brzozowski). Outra forma é pela própria definição da linguagem. Notem que uma palavra pertencente a linguagem é uma concatenação de uma palavra qualquer no alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ com o símbolo 1. Dessa forma, temos a seguinte expressão: Σ^*1, ou ainda $(0 \cup 1)^*1$.