Expressões Regulares e Algoritmo de Brzozowski

Luís Felipe

UFF

19 de Abril de 2023

Luís Felipe

19/04/22

Geradores de linguagens

- Até o momento trabalhamos com autômatos, que são reconhecedores de linguagens.
- Agora, definiremos Expressões Regulares, que são expressões geradoras de linguagens.
- Fazendo uma analogia com a aritmética, usamos operações como $\times$, $+$ para montar expressões
- Para montar expressões que geram linguagens regulares, vamos utilizar algumas operações regulares.

  Exemplo: $(0 \cup 1) \circ 1^*$

  - Qual seria a linguagem gerada pela expressão regular acima?

    Todas as palavras que começam ou por 0 ou por 1 e são seguidas por uma cadeira de zero ou mais 1's

Luís Felipe
19/04/22

Definição

R é uma expressão regular se R for

1. a, para algum $a \in \Sigma$
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. ${R_1}^*$, onde R_1 é expressão regular.

Luís Felipe
19/04/22

Observações

- Nos itens 1) e 2) as expressões regulares geram as linguagens $\{a\}$ e $\{\varepsilon\}$, respectivamente. $\emptyset$ representa a linguagem vazia.
- Esta definição é dita definição indutiva.
- Ordem de precedência: estrela, concatenação, união (quando não houver parênteses).
- Assim como o símbolo $\times$ é omitido na aritmética, o símbolo $\circ$ é comumente omitido em expressões regulares.
- Σ é a linguagem obtida pela união dos elementos de Σ
- $R^{+} = RR^{\star}$ R^{+} tem todas as cadeias resultantes de uma ou mais concatenações de cadeias de R.
- $R^{+} \cup \{\varepsilon\} = R^{\star}$
- L(R) é a linguagem gerada por R

Luís Felipe
19/04/22

Exemplos

Se $\Sigma = \{0, 1\}$, que linguagem sou eu????

1. $0^\star 10^\star$ = {w | w tem um único 1}
2. $\Sigma^\star 1 \Sigma^\star$ = {w | w tem um pelo menos um 1}
3. $\Sigma^\star 001 \Sigma^\star$ = {w | w tem a cadeia 001}
4. $1^\star(01^+)^\star$= {w | todo 0 em w é seguido por pelo menos um 1}
5. $(\Sigma\Sigma)^\star$= {w | w tem comprimento par}
6. $(\Sigma\Sigma\Sigma)^\star$= {w | w tem comprimento múltiplo de 3}

Luís Felipe

19/04/22

Exemplos

Se $\Sigma = \{0, 1\}$, que linguagem sou eu????

7. $01 \cup 10$ = $\{01, 10\}$
8. $0\Sigma^{\star}0 \cup 1\Sigma^{\star}1 \cup 0 \cup 1$ = $\{$w | w começa e termina com o mesmo símbolo$\}$
9. $(0 \cup \varepsilon)1^{\star}$ = $01^{\star} \cup 1^{\star}$
10. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon)$= $\{01, 0, 1, \varepsilon\}$
11. $1^{\star}\emptyset$= $\emptyset$
12. $\emptyset^{\star}$= $\{\varepsilon\}$

Luís Felipe
19/04/22

Equivalência com autômatos finitos

Teorema. Uma linguagem é regular se, e somente se, alguma expressão regular a descreve.

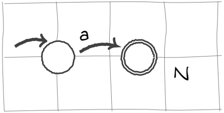
Lema 1. (←) Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

Prova: Seja R um expressão regular. Vamos construir um AFN que reconheça a mesma linguagem que R gera. Para isso, vamos seguir a definição indutiva de expressão regular.

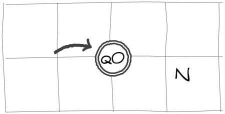
Luís Felipe
19/04/22

Conversão ER em AFN

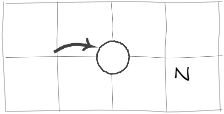
1. $R = a$, para $a \in \Sigma$



2. $R = \varepsilon$



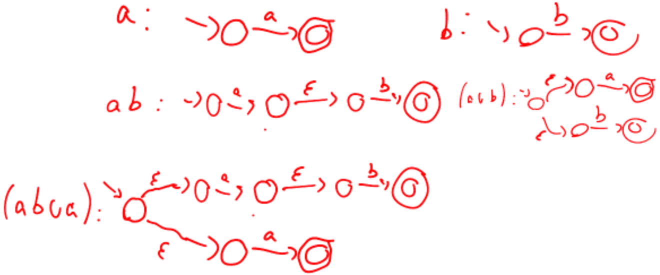
3. $R = \emptyset$



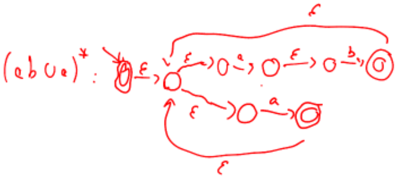
Para os 3 últimos casos, basta seguir as construções vistas nas provas de que a classe das LR's é fechada sob união, concatenação e estrela. $\square$

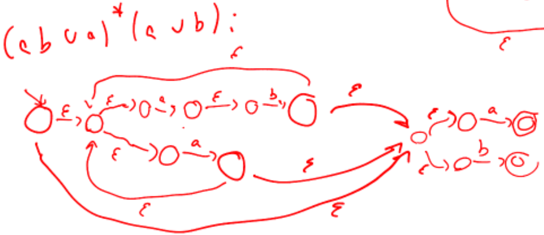
Luís Felipe
19/04/22

Exemplo



$(ab \cup a)^{\star}(a \cup b)$





Luís Felipe
19/04/22

ER's vs autômatos finitos

- Mostramos, no Lema 1, como construir um AFN a partir da definição de ER.
  - Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.
- Resta, portanto, dado um autômato finito M, sabermos convertê-lo na ER que gera $L(M)$.
- Vamos usar o Algoritmo de Brzozowski.

Luís Felipe
19/04/22

Algoritmo de Brzozowski

Entrada: Descrição de um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
Saída: Expressão Regular R tal que $L(R) = L(M)$

- Ideia: Dado $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$, t.q. $q_0 = q_1$, construir linguagens L_i que são o conjunto de palavras que levam M de q_i a algum estado final $(1 \leq i \leq k)$.
- Note que $L(M) = L_1$, pois L_1 é o conjunto de palavras que levam M de q_1 até um estado final.
- Vamos construir ER's para as L_i's e o algoritmo retornará a ER correspondente a L_1.

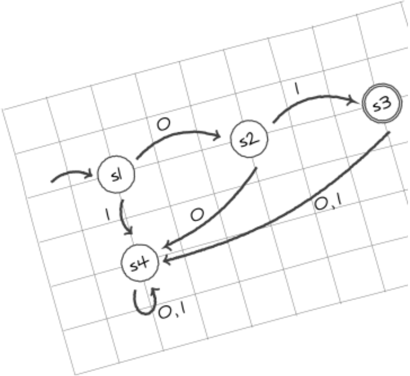
Luís Felipe
19/04/22

$L_4 = (0 \cup 1) L_4 \cup \emptyset$
$= (0 \cup 1)^* \emptyset = \emptyset$

Algoritmo de Brzozowski – Exemplo I

$$\begin{cases} L_1 &= 0L_2 \cup 1L_4 \\ L_2 &= 1L_3 \cup 0L_4 \\ L_3 &= 0L_4 \cup 1L_4 \cup \{\varepsilon\} \\ L_4 &= 0L_4 \cup 1L_4 \end{cases}$$

- Note que s_4 é estado morto, assim, $L_4 = \emptyset$.



$$\begin{cases} L_1 &= 0L_2 \\ L_2 &= 1L_3 \\ L_3 &= \{\varepsilon\} \\ L_4 &= \emptyset \end{cases}$$

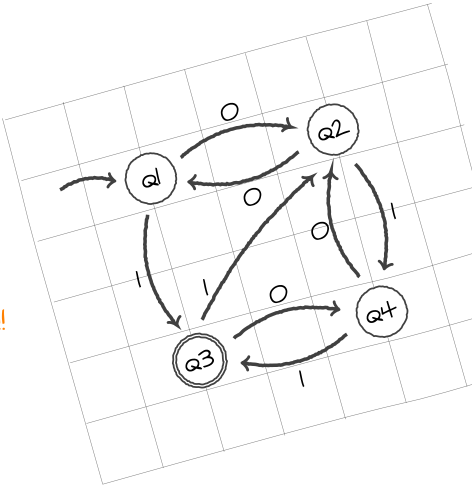
- Fazendo substituições de baixo para cima:
  - $L_2 = 1L_3 = 1\{\varepsilon\} = \{1\}$
  - $L_1 = 0L_2 = 0\{1\} = \{01\}$

Luís Felipe
19/04/22

Algoritmo de Brzozowski - Exemplo 2

$$\begin{cases} L_1 &= 0L_2 \cup 1L_3 \\ L_2 &= 0L_1 \cup 1L_4 \\ L_3 &= 1L_2 \cup 0L_4 \cup \{\varepsilon\} \\ L_4 &= 0L_2 \cup 1L_3 \end{cases}$$

- Façamos substituições de baixo para cima. Quadro!!!



Luís Felipe
19/04/22

Lema de Arden

Sejam A e B duas linguagens tais que $\varepsilon \notin A$. Então a maior solução para a equação $X = AX \cup B$ é $X = A^{\star}B$.

Prova:

1. Mostrar que $X = A^{\star}B$ é realmente solução de $X = AX \cup B$.
2. Mostrar que $X = A^{\star}B$ é a maior solução de $X = AX \cup B$.

Luís Felipe

19/04/22

Prova

Prova:

1. Mostrar que $X = A^{\star}B$ é realmente solução de $X = AX \cup B$.

- ideia: vamos verificar que realmente $A^{*}B$ pode ser escrito como $A(A^{*}B) \cup B$.

$$\begin{aligned} A^{*}B &= (AA^{*} \cup \varepsilon)B \\ &= AA^{*}B \cup B \\ &= A(A^{*}B) \cup B \end{aligned}$$

- Obs.: Primeira parte feita!!!

Luís Felipe

19/04/22

Prova (2a parte)

Prova (2a parte):

2. Mostrar que $X = A^{\star}B$ é a maior solução de $X = AX \cup B$.

- ideia: demonstração por contradição!
- Suponha que exista solução maior para $X = AX \cup B$, ou seja, $X = A^{*}B \cup C$, tal que $C \neq \emptyset$.
- Podemos assumir que $(A^{*}B) \cap C = \emptyset$.
  - Podemos assumir isso, pois senão:
    - Se $C \subseteq (A^{*}B)$, então $X = A^{*}B \cup C = A^{*}B$.
    - Se $C \not\subseteq (A^{*}B)$ então existe $C' \subseteq C$ tal que $(A^{*}B) \cap C' = \emptyset$. Logo, tomemos C'.
- Continua...

Luís Felipe

19/04/22

Prova (continuação)

- Lembrem que assumimos que $X = A^*B \cup C$ e $(A^*B) \cap C = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
X &= AX \cup B \\
A^*B \cup C &= A(A^*B \cup C) \cup B \\
&= AA^*B \cup AC \cup B \\
&= (AA^* \cup \varepsilon)B \cup AC \\
&= A^*B \cup AC
\end{aligned}
$$

- Assim, $A^*B \cup C = A^*B \cup AC$. Continuando:

$$
\begin{aligned}
A^*B \cup C &= A^*B \cup AC \\
(A^*B \cup C) \cap C &= (A^*B \cup AC) \cap C \\
\underbrace{(A^*B \cap C)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(C \cap C)}_{=C} &= \underbrace{(A^*B \cap C)}_{=\emptyset} \cup (AC \cap C) \\
C &= AC \cap C.
\end{aligned}
$$

- Caso i) $C = \emptyset$. Contraria hipótese $C \neq \emptyset$ e assim $X = A^*B$.
- Caso ii) $C \neq \emptyset$. $C = AC \cap C = \underbrace{(A \cap \varepsilon)}_{=\emptyset} C = \emptyset$. Absurdo.

Luís Felipe
19/04/22

Exemplo 2

- Com o Lema de Arden, somos agora capazes de continuar o Exemplo 2.

Luís Felipe

19/...1/22

$$
\begin{cases}
L_1 = 0L_2 \cup 1L_3 \\
L_2 = 0L_1 \cup 1L_4 \\
L_3 = 1L_2 \cup 0L_4 \cup \{\varepsilon\} \\
L_4 = 0L_2 \cup 1L_3 .
\end{cases}
$$

$$L_3: 1L_2 \cup 0(0L_2 \cup 1L_3) \cup \varepsilon$$

$$L_3: 1L_2 \cup 00L_2 \cup 01L_3 \cup \varepsilon$$

$$L_3: 01L_3 \cup 1L_2 \cup 00L_2 \cup \varepsilon$$

$$L_3: (01)^*(1L_2 \cup 00L_2 \cup \varepsilon)$$

$$L_3: (01)^*1L_2 \cup (01)^*00L_2 \cup (01)^*$$

$$L_4: 0L_2 \cup 1((01)^*1L_2 \cup (01)^*00L_2 \cup (01)^*)$$

$$L_2: 0L_1 \cup 1(0L_2 \cup 1((01)^*1L_2 \cup (01)^*00L_2 \cup (01)^*))$$

$$L_2: 0L_1 \cup 10L_2 \cup 11(01)^*1L_2 \cup 11(01)^*00L_2 \cup 11(01)^*$$

$$L_2: (10 \cup 11(01)^*1 \cup 11(01)^*00)L_2 \cup 0L_1 \cup 11(01)^*$$

$$L_2: (10 \cup 11(01)^*1 \cup 11(01)^*00)^*(0L_1 \cup 11(01)^*)$$

OBS.: L_2 está em função de L_1 e L_3 em função de L_2. Faça substituição de L_2 em L_3 e veja que L_3 ficará em função de L_1 somente. Após isso, em L_1 substitua L_2 e L_3, assim L_1 ficará em função de L_1 somente. Aplique o Lema de Arden em L_1.