Operações Regulares e AFN

Luís Felipe

UFF

12 de Abril de 2023

Luís Felipe

12/04/23

Operações Regulares

- União $A \cup B = \{ w \mid w \in A \text{ ou } w \in B \}$
- Interseção $A \cap B = \{ w \mid w \in A \text{ e } w \in B \}$
- Complemento $\overline{A} = \{ w \mid w \notin A \}$
- Concatenação $A \circ B = \{ w \mid w = a \circ b, a \in A, b \in B \}$

  OBS.:

  1. $\{\varepsilon\} \circ A = A$
  2. $\emptyset \circ A = \emptyset$
  3. $\{\varepsilon\} \cup A = \{\varepsilon, A\}$
  4. $\emptyset \cup A = A$

- Estrela $A^* = \{ w = w_1 \circ w_2 \circ \cdots \circ w_k \mid k \geq 0 \text{ e } w_i \in A \}$

  OBS.: $\varepsilon \in A^*$, para toda linguagem A.

Luís Felipe
12/04/23

Exemplos

Σ é o nosso alfabeto

$L_1 = \{$ fake, facebook$\}$ $L_2 = \{$ news, política$\}$

1. $L_1 \cup L_2 = \{$ fake, facebook, news, política $\}$
2. $L_1 \circ L_2 = \{$ fake news, fake política, facebook news, facebook política $\}$
3. $L_1^* = \{\varepsilon,$ fake, facebook, fake fake, facebook facebook, fake facebook, facebook fake, fake fake fake, facebook facebook facebook, fake fake facebook, fake facebook fake, facebook fake fake, fake facebook facebook, facebook fake facebook, facebook facebook fake, $\ldots\}$

Luís Felipe
12/04/23

Fechamento sob união

Teorema. A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Ideia da Prova: Por construção. Sejam A_1 e A_2 duas LR's. Logo, existem $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1), M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, autômatos finitos, que reconhecem A_1 e A_2 respectivamente. Vamos construir uma máquina M=(Q,Σ, δ, q_0,F), que reconhece $A_1 \cup A_2$ a partir de M_1, M_2.

1. Q $= \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
2. Σ é o mesmo em M_1, M_2, por questão de simplicidade.
3. $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$.
4. q_0 é o par (q_1, q_2).
5. F= $\{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1$ ou $r_2 \in F_2\} = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

Luís Felipe
12/04/23

E se ...?

1. M simula M_1 e M_2 simultaneamente.
2. F= $F_1 \times F_2 \neq (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
   - A qual operação estaria associado este conjunto F?

interseção

Luís Felipe
12/04/23

Exemplo

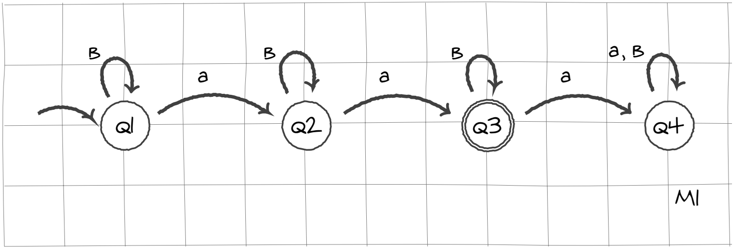
$A = \{ w \mid w$ tem exatamente dois a's ou pelo menos dois b's$\}$, $\Sigma = \{a, b\}$

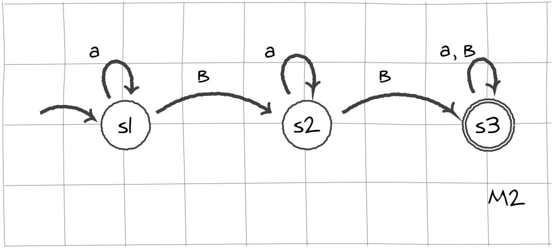
$A = A_1 \cup A_2$, onde
$A_1 = \{w \mid w$ tem exatamente dois a's $\}$ e
$A_2 = \{ w \mid w$ tem pelo menos dois b's $\}$

Luís Felipe

12/04/23

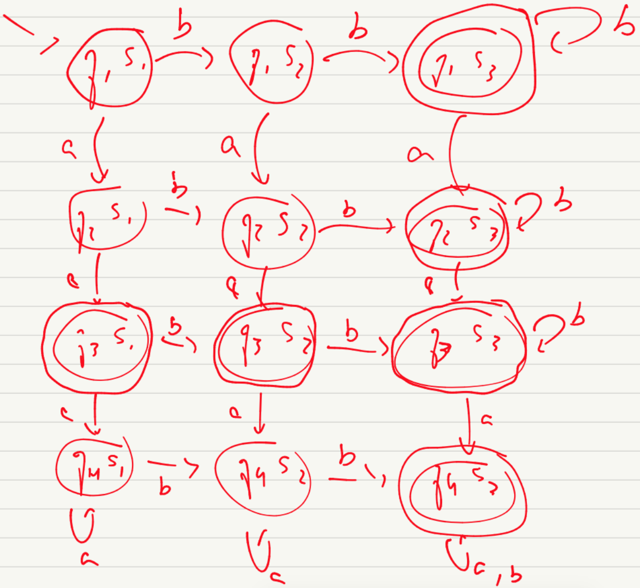
Continuação





Luís Felipe

12/04/23



Luís Felipe
12/04/23

Não-determinismo

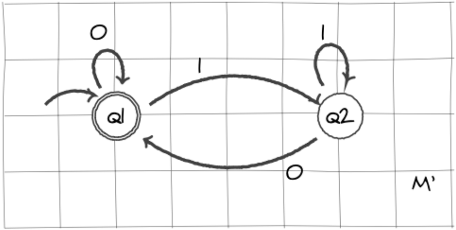
- Até o momento, cada passo de uma computação segue de maneira única do passo precedente.
- Assim, se estamos em um determinado estado e a leitura de um símbolo é feita, sabemos, deterministicamente, qual o estado que alcançaremos.
- Em uma máquina não-determinística várias escolhas podem existir para o próximo estado em qualquer ponto.
- O não-determinismo generaliza o determinismo.
  - Todo autômato finito determinístico (AFD) é também um autômato finito não-determinístico (AFN).

Luís Felipe
12/04/23

Exemplo - Árvore da Computação

1. 0110

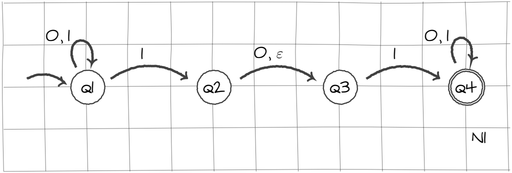
q_1
$\downarrow 0$
q_1
$\downarrow 1$
q_2
$\downarrow 1$
q_2
$\downarrow 0$
q_1



Luís Felipe

12/04/23

AFN - exemplo



Diferenças evidentes entre um AFD e um AFN

- transição ε
- Um estado em um AFD tem sempre uma seta saindo para cada símbolo de Σ
- Um AFN pode ter várias setas saindo para um mesmo símbolo de Σ.

Luís Felipe
12/04/23

Computação de um AFN

- Suponha que o AFN esteja num estado com múltiplas maneiras de prosseguir.
- Após ler um símbolo, ele se divide em cópias e segue todas as possibilidades em paralelo.
- Cada cópia toma uma maneira possível de proceder e continua como antes.
- Se em algum momento posterior o AFN tem múltiplas escolhas, se divide em cópias novamente.
- Se o próximo símbolo da palavra não aparece em alguma seta de saída do estado atual (nosso ou de alguma cópia), essa cópia da máquina morre junto com o ramo da computação associado a ela.
- Se a transição for rotulada por ε, então o AFN se copia e segue a transição sem ler símbolo da entrada.
- Se em alguma cópia o AFN finaliza a leitura da entrada em um estado final, então a palavra é aceita pelo AFN.

Luís Felipe

12/04/23

Definição

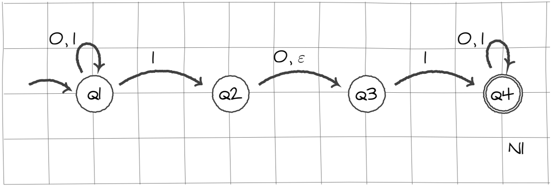
Um autômato finito não-determinístico é uma 5-upla $N=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que:

1. Q é o conjunto finito de estados
2. Σ é o alfabeto finito
3. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ é a função de transição, onde $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
4. $q_0 \in Q$ é o estado inicial
5. F é o conjunto de estados finais

Luís Felipe

12/04/23

Exemplo



1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
2. $\Sigma = \{0, 1\}$
3.

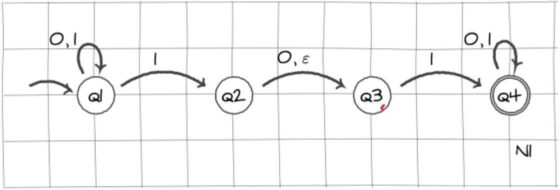
δ	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$

4. $q_0 = q_1$
5. $F = \{q_4\}$

Luís Felipe
12/04/23

Exemplo - Árvore da Computação

1. 0110



Luís Felipe

12/04/23

Aceitação em um AFN

- N aceita a palavra w se $w = y_1 y_2 \dots y_m$, onde cada $y_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existe uma sequência de estados $r_0 r_1 \dots r_m$ tal que:
    1. $r_0 = q_0$
    2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1}), i = 0, \dots, m-1$, e
    3. $r_m \in F$

OBS: Uma palavra aceita por um AFN pode possuir mais de uma computação. Além disso, pode ter alguma computação que a rejeite! O que devemos ter, neste caso, é alguma computação que a aceite!