AFD - Construindo autômatos

Luís Felipe

UFF

10 de Abril de 2023

Luís Felipe
10/04/23

Autômato finito

Um autômato finito é uma 5-upla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que:

1. Q é o conjunto finito de estados
2. Σ é o conjunto finito chamado alfabeto
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a função de transição ou a função de próximo estado
4. q_0 é o estado inicial
5. $F \subseteq Q$ é o conjunto finito de estados finais ou estados de aceitação

Luís Felipe

10/04/23

OBS

1. A partir de um estado, sai exatamente uma seta de transição para cada símbolo de Σ.

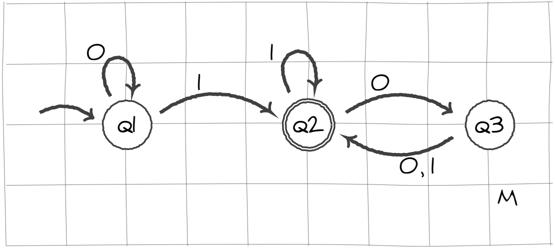
2. É possível termos um autômato sem estados finais, i.e., $F = \emptyset$.

Luís Felipe

10/04/23

Diagrama de Estados

Exemplo:



Luís Felipe
10/04/23

Descrição formal - exemplo anterior

Podemos descrever M=(Q,Σ, δ, q_0,F) formalmente da seguinte forma:

1. Q = $\{q_1, q_2, q_3\}$
2. Σ= $\{0, 1\}$
3. δ é descrita através de uma tabela de transições

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

4. $q_0 = q_1$
5. F = $\{q_2\}$

Luís Felipe
10/04/23

Linguagens Regulares

- Dizemos que um autômato M aceita uma palavra w de tamanho ℓ se existe uma sequência de estados $r_0, r_1, \cdots, r_\ell$ tal que:
  - $r_0 = q_0$
  - $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}, 0 \leq i \leq \ell - 1$
  - $r_\ell \in F$
- Dizemos que um autômato M reconhece uma linguagem L se L=$\{w \mid M \text{ aceita } w\}$

  OBS.:

  1. M pode aceitar muitas palavras, mas reconhece uma única linguagem, denotada por L(M).
  2. Se M aceitar nenhuma palavra, ainda sim M reconhece uma linguagem. Qual? vazia

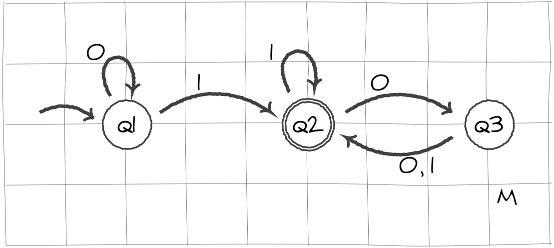
- Uma linguagem é regular se algum autômato finito a reconhece.

Luís Felipe

10/04/23

Voltando ao exemplo...

Qual linguagem o autômato M abaixo reconhece?



L(M) = { w | w possui 1 e um número par de zeros após o último 1 }

Será??

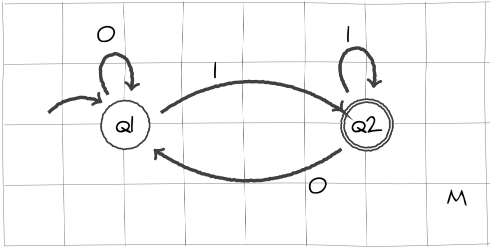
Luís Felipe

10/04/23

Identificando linguagens

Exemplos:

1.



Qual linguagem M reconhece?

$A = \{w \mid w \text{ termina em } 1\}$

Luís Felipe
10/04/23

Prova por Inclusão

Vamos mostrar que $A = L(M)$. Para tal, vamos mostrar que $A \subseteq L(M)$ e $L(M) \subseteq A$.

1. $A \subseteq L(M)$. Ou seja, vamos mostrar que toda palavra que pertence a linguagem A é aceita pelo autômato M.

   Como toda palavra em A é da forma $w{=}X1$, e transições rotuladas por 1 conduzem a q_2, um estado final, temos que toda palavra de A é aceita por M.

2. $L(M) \subseteq A$. Ou seja, vamos mostrar que toda palavra aceita pelo autômato M pertence a linguagem A.

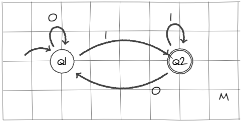
   Apenas transições rotuladas com 1 conduzem ao estado final q_2. Logo, M aceita apenas palavras terminadas em 1.

Logo, $A{=}L(M)$.

Luís Felipe

10/04/23

Prova por Indução



Provaremos por indução em $|w|$, que o estado atingido é:

- $q_1 \leftrightarrow w$ não termina em 1;
- $q_2 \leftrightarrow w$ termina em 1.

OBS.: Devemos mostrar a propriedade de aceitação para cada estado.

BASE : $|w| = 0$, $w = \varepsilon$. Dessa forma, não saímos de q_1.

HI : Suponha verdadeiras as equivalências anteriores para toda palavra x de tamanho menor que k.

PASSO : $|w| = k > 0$. Dois casos, i) $w = x0$ ou ii) $w = x1$.

i) $w = x0$. Então w atinge q_1 de uma de duas formas: vindo de q_1 com x terminando em 0 ou de q_2 com x terminando em 1 (por HI);

ii) $w = x1$. Então w atinge q_2 de uma de duas formas: vindo de q_1 com x terminando em 0 ou vindo de q_2 com x terminando em 1 (por HI).

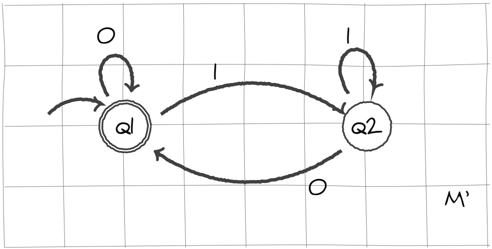
Logo, A=L(M).

Luís Felipe
10/04/23

Identificando Linguagens

Exemplos:

2.



Qual linguagem M' reconhece?

A' = {w| w termina em 0 ou w = ε }

Exercício: Mostrar que A'=L(M') por inclusão e por indução.

Luís Felipe
10/04/23

Argumento por complementaridade

Vamos mostrar que
$L(M') = A' = \{w \mid w \text{ termina em } 0 \text{ ou } w = \varepsilon\}$.

Veja a prova para $L(M)$ (Exemplo 1.) e a mudança do estado final.

Observe que:

1. $\varepsilon \in L \leftrightarrow q_0 \in F$.
2. $L(M') = \overline{L(M)}$
3. AFD M de L com estados finais F fornece AFD M' de $\overline{L}$ com estados finais $Q \setminus F$.

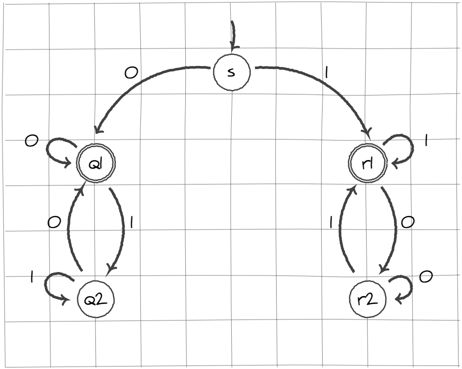
Portanto, a classe das linguagens regulares é fechada por complemento!!!!

Luís Felipe
10/04/23

Identificando Linguagens

Exemplo:

3.



Qual linguagem M reconhece?

A' = {w| w começa e termina com o mesmo símbolo}

Luís Felipe

10/04/23

Projetando Autômatos

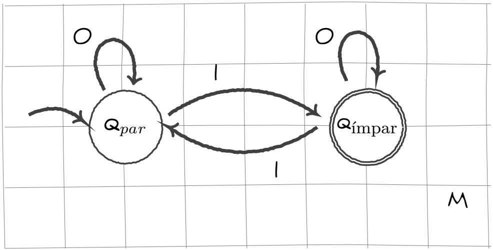
- Estratégia: Finja que você é o autômato!
- Imagine-se recebendo uma palavra a fim de determinar se ela pertence ou não a uma linguagem.
- Lembre-se que sua memória é finita e limitada!
- O que acontece se a palavra for muito, muito, muito, muito grande?
    - Você conseguirá armazenar toda informação que você ler? Não
    - A cada novo símbolo lido, você deve estar pronto para responder se a cadeia, até o momento, é aceita ou não.

Luís Felipe

10/04/23

Exemplos

1. $L = \{ w \mid w$ tem um número ímpar de 1's $\}$



Exercício: Provar que $L = L(M)$ por inclusão e por indução

Luís Felipe

10/04/23

Exemplos

2. $L = \{ w \mid w \text{ contém } 001 \text{ como subcadeia} \}$