Introdução à Teoria da Computação e AFDs

Luís Felipe

UFF

05 de Abril de 2023

Luís Felipe

05/04/22

Tópicos centrais

Perguntas:

- Quais temas são abordados no curso?
- O que é o curso de Teoria da Computação?
- Questão Principal: Quais são as capacidades e limitações fundamentais dos computadores?

Três pontos para responder:

- Teoria da Computabilidade
- Teoria da Complexidade
- Teoria dos Autômatos

Luís Felipe

05/04/22

Teoria da Computabilidade

- Classifica um problema computacional em solúvel ou não solúvel, através do conhecimento se um problema pode ser algoritmicamente resolvido por um computador ou não.

- Quais são os limites do que um computador consegue resolver?
  - Resposta: Veremos exemplos de problemas não solúveis, como o Problema da Parada da Máquina de Turing.

Luís Felipe

05/04/22

Teoria da Complexidade

- Classifica um problema computacional em fácil ou difícil, através da definição de algoritmo, como solução eficiente ou ineficiente.

- O que faz um problema ser computacionalmente fácil ou difícil?
  - Resposta: Vemos em cursos de Complexidade de Algoritmos, Análise e Projeto de Algoritmos, Análise e Síntese de Algoritmos, dentre outros.
  - Veja a matéria Resolver ou Verificar? Ciência Hoje, na página do curso.
  - Veja apresentação da área de Algoritmos e Otimização em `https://www.youtube.com/watch?v=Fe60eCABoss`
  - Partes do curso de Análise e Síntese de Algoritmos em: `https://youtube.com/playlist?list=PLt3uqPJ3gc4N1AQyDZ836nrJrGYxfPqEC`

Luís Felipe

05/04/22

Teoria dos Autômatos

- Estudo de modelos formais de computação, a partir de um mais simples até um mais poderoso. Este modelo mais poderoso a ser visto possui o mesmo poder computacional de um computador real.
    - O que estudaremos? Definições e propriedades de modelos matemáticos de computação.
    - Esses modelos computacionais são conhecidos como autômatos.

Luís Felipe

05/04/22

Modelos de computação

- As teorias da Computabilidade e da Complexidade requerem uma definição precisa de um computador.

- Começamos dos autômatos como modelo mais simples, a máquina de estados finita (autômato finito ou finite state machine).

- O autômato finito modela o computador com memória pequena mesmo assim temos muito poder.

Luís Felipe

05/04/22

Definições

- Alfabeto é um conjunto finito de símbolos $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- Palavra no alfabeto Σ é uma sequência $w = r_1 r_2 \dots r_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, $r_i \in \Sigma$.

- Palavra vazia, ε, é uma cadeia vazia, que não contém nenhum símbolo.
  - $|w|$ é o comprimento de w, ou seja, o número de símbolos não necessariamente distintos que ocorrem em w.
  - $|\varepsilon| = 0$. A única palavra de comprimento zero é ε.

- Σ^* é o conjunto de todas as palavras no alfabeto Σ. Observe que $\varepsilon \in \Sigma^*$.
  - Exemplo: Seja $\Sigma = \{a, b\}$. Então, $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$.

Luís Felipe

05/04/22

Linguagens

- Uma linguagem formal L (ou simplesmente linguagem L) no alfabeto Σ é um subconjunto de Σ^*, i.e., $L \subseteq \Sigma^*$.

Exemplos: $\Sigma = \{a, b\}$.

1. $L_1 = \{b, baa, baaaa, baaaaaa, \ldots\}$ é uma linguagem sobre o alfabeto Σ. Qual outra forma de descrever L_1?
2. $L_2 = \emptyset$. L_2 é linguagem no alfabeto Σ? e $L_3 = \{\varepsilon\}$?
3. Qual diferença entre L_2 e L_3?

Luís Felipe

05/04/22

Operações

- Concatenação: $w_1 \circ w_2$, ou simplesmente $w_1 w_2$, é a palavra obtida escrevendo primeiro w_1, e imediatamente após o último símbolo de w_1, os símbolos de w_2.
  Com isso, $|w_1 w_2| = |w_1| + |w_2|$.
- Obs.: Operação associativa, não comutativa, $w\varepsilon = \varepsilon w = w$.
- Como linguagens são conjuntos, várias operações com linguagens vem da Teoria dos Conjuntos, como: União, Interseção, Complemento, Diferença.

Luís Felipe

05/04/22

Operações com linguagens

- União: $L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ ou } w \in L_2\}$
- Interseção: $L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ e } w \in L_2\}$
- Diferença: $L_1 - L_2 = \{w \mid w \in L_1 \text{ e } w \notin L_2\}$
- Concatenação: $L_1 \circ L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ e } w_2 \in L_2\}$

Exemplos: $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_1 = \{00, 11, 000\}$, $L_2 = \{00, 101, 100\}$.

- $L_1 \cup L_2 = \{00, 11, 000, 101, 100\}$.
- $L_1 \cap L_2 = \{00\}$.
- $L_1 - L_2 = \{11, 000\}$.
- $L_1 \circ L_2 =$ $\{0000,\ 00101,\ 00100,\ 1100, 11101,\ 11100,\ 00000,\ 000101,\ 000100\}$.
- Dados L_1 e L_2 arbitrárias, $|L_1 \circ L_2| \leq |L_1|.|L_2|$. Qual condição suficiente para ter igualdade? Existe caso da desigualdade ser estrita? Quando?

Luís Felipe

05/04/22

Ferramentas

Para estudar linguagens formais, temos dois tipos de ferramentas:

- Geradores de linguagens: gramáticas, expressões regulares;
- Reconhecedores de linguagens: autômatos.

Luís Felipe
05/04/22

Autômato finito

Um autômato finito é uma 5-upla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que:

1. Q é o conjunto finito de estados
2. Σ é o conjunto finito chamado alfabeto
3. $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ é a função de transição ou a função de próximo estado
4. q_0 é o estado inicial
5. $F \subseteq Q$ é o conjunto finito de estados finais ou estados de aceitação

Luís Felipe

05/04/22

OBS

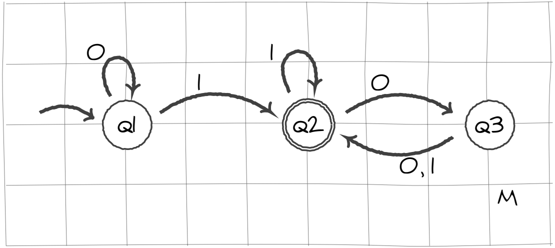
1. A partir de um estado, sai exatamente uma seta de transição para cada símbolo de Σ.
2. É possível termos um autômato sem estados finais, i.e., $F = \emptyset$.

Luís Felipe

05/04/22

Diagrama de Estados

Exemplo:



Luís Felipe
05/04/22

Descrição formal - exemplo anterior

Podemos descrever $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ formalmente da seguinte forma:

1. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
2. $\Sigma = \{0, 1\}$
3. δ é descrita através de uma tabela de transições

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

4. $q_0 = q_1$
5. $F = \{q_2\}$

Luís Felipe

05/04/22

Linguagens Regulares

- Dizemos que um autômato M aceita uma palavra w de tamanho ℓ se existe uma sequência de estados $r_0, r_1, \cdots, r_\ell$ tal que:
  - $r_0 = q_0$
  - $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}, 0 \leq i \leq \ell - 1$
  - $r_\ell \in F$
- Dizemos que um autômato M reconhece uma linguagem L se L=$\{$w | M aceita w$\}$

  OBS.:
  1. M pode aceitar muitas palavras, mas reconhece uma única linguagem, denotada por L(M).
  2. Se M aceitar nenhuma palavra, ainda sim M reconhece uma linguagem. Qual? vazia
- Uma linguagem é regular se algum autômato finito a reconhece.