# Teoria da Complexidade

Luís Felipe

UFF

28 de Junho de 2023

Luís Felipe
28/06/23

# Teoria da Complexidade

- Teoria da Computabilidade
  Problemas decidíveis × Problemas indecidíveis

- Dentre os problemas decidíveis, temos a Teoria da Complexidade.

- Teoria da Complexidade
  Problemas tratáveis × Problemas intratáveis

Luís Felipe
28/06/23

# Classes da Complexidade - P e NP

- Uma MTM é polinomialmente limitada se existe um polinômio $p(x)$ tal que para toda palavra $w$ fornecida como entrada, M para após executar no máximo $p(|w|)$ transições.

- A classe de complexidade P é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT determinística polinomialmente limitada.

- A classe de complexidade NP é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT não-determinística polinomialmente limitada.

  Consequência: Como MT's determinísticas são um caso particular de MT's não-determinísticas, temos:

$$P \subseteq NP$$

  Obs.: NP tem a característica de adivinhar e verificar.

Luís Felipe
28/06/23

# Adivinhar e verificar

## Classe P:

Consideramos um problema tratável sse ele pertence a P.

- O tempo de execução aumenta polinomialmente com relação ao tamanho da entrada.

## Classe NP:

- Não-determinismo utilizado para adivinhar (dentro de um espaço de busca finito) uma testemunha ou certificado de que uma entrada pertence à linguagem, verificada deterministicamente em tempo polinomial.

- Caso exista essa testemunha, uma das computações da MT irá parar no estado de aceitação. Caso não exista, todas as computações irão parar no estado de rejeição.

- Em NP, resolver o problema pode ser difícil (não eficiente), mas verificar se uma solução dada é correta pode ser feito de forma eficiente.

Luís Felipe
28/06/23

# Exemplo

Exemplo de linguagem em NP: Codificação dos números compostos.

- Certificado (testemunha) de que esteja em NP: um número maior do que 1 e menor do que a entrada que seja um fator do número da entrada.

- Algoritmo certificador: Divida a entrada pela testemunha e verifique se o resto da divisão é igual a 0.

Luís Felipe
28/06/23

# Classes da Complexidade: $EXPTIME$ e $NEXPTIME$

- Uma MT M é exponencialmente limitada se existe uma constante $c$ um polinômio $p(x)$ tal que para toda palavra $w$ fornecida como entrada, M para após executar no máximo $c^{p(|w|)}$ transições.

- A classe de complexidade $EXPTIME$ é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT determinística exponencialmente limitada.

- A classe de complexidade $NEXPTIME$ é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT não-determinística exponencialmente limitada.

Consequência: Por argumento similar ao usado entre P e NP, temos:

$$EXPTIME \subseteq NEXPTIME$$

Luís Felipe
28/06/23

# Hierarquia de Classes da Complexidade

- Vimos que toda MT não-determinística pode ser transformada em uma MT determinística equivalente que executa uma quantidade de passos exponencialmente maior do que os passos executados pela MT não-determinística original (Aula 16). Logo, temos:

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathit{EXPTIME}$$

- Temos assim, até agora, a seguinte Hierarquia de Classes de Complexidade:

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathit{EXPTIME} \subseteq \mathit{NEXPTIME}$$

Luís Felipe
28/06/23

# Classes de Complexidade de espaço

Vimos classes de hierarquia em relação ao número de execuções das MT's, i.e., no tempo de processamento. Vamos ver como relacionar com espaço (memória).

- Uma MT é espacialmente polinomialmente limitada se existe um polinômio $p(x)$ tal que para toda palavra $w$ que seja fornecida como entrada, a MT para após visitar com o cabeçote no máximo $p(|w|)$ casas distintas da fita.

- A classe de complexidade *PSPACE* é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT determinística espacialmente polinomialmente limitada.

- A classe de complexidade *NPSPACE* é formada por todos os problemas que podem ser decididos por uma MT não-determinística espacialmente polinomialmente limitada.

Luís Felipe
28/06/23

# Tempo e espaço

- Como a cada transição a MT visita no máximo uma casa nova fita, após executar $p(|w|)$ passos a MT terá visitado no máximo $p(|w|)+1$ casas.

- Logo, uma MT limitada polinomialmente em tempo é também limitada polinomialmente em espaço. Ou seja:

$$\mathrm{P} \subseteq PSPACE$$

Analogamente,

$$\mathrm{NP} \subseteq NPSPACE$$

Teorema de Savitch: $PSPACE = NPSPACE$

Luís Felipe
28/06/23

# $PSPACE$ e $EXPTIME$

Proposição: $PSPACE \subseteq EXPTIME$

Ideia da demonstração: Seja $\Pi$ um problema, $\Pi \in PSPACE$ e $M$ uma MT para $\Pi$. Seja $w$ uma entrada. $M$ vai parar após visitar no máximo $p(|w|)$ casas distintas da fita. Suponha também que:

- $M$ possui $n$ símbolos no alfabeto da fita;
- $M$ possui $m$ estados;
- Cabeçote em $p(|w|)$ posições possíveis;
- Existem $n^{p(|w|)}$ configurações possíveis da fita;
- Logo, há $mp(|w|)n^{p(|w|)}$ possíveis configurações para $M$ durante computação de $w$.
- Como $M$ é determinística e para com a entrada $w$, não há repetição de configuração na fita.

Luís Felipe
28/06/23

# Hierarquia de complexidades de tempo e espaço

Resumidamente:

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME$$

P: classe dos problemas tratáveis;

$\mathrm{NP} \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME$: classes candidatas a problemas intratáveis.

Luís Felipe

28/06/23

# Reduções polinomiais

- Uma função $f : \Sigma^* \Rightarrow \Sigma^*$ é polinomialmente computável se existe uma MT determinística polinomialmente limitada que a computa.

- Dados $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, dizemos que existe uma redução polinomial de $L_1$ para $L_2$, se existe uma função polinomialmente computável $f$ tal que $w \in L_1$ sse $f(w) \in L_2$.

- Se $\mathcal{C}$ é uma classe de hierarquia de complexidade, dizemos que $L$ é $\mathcal{C}$-difícil se para toda $L' \in \mathcal{C}$, existe uma redução polinomial de $L'$ para $L$.

- $L$ é $\mathcal{C}$-completa se $L$ é $\mathcal{C}$-difícil e $L \in \mathcal{C}$.

- Se $L$ é $\mathcal{C}$-completa, $L' \in \mathcal{C}$ e existe uma redução polinomial de $L$ para $L'$, então $L'$ também é $\mathcal{C}$-completa.

- Teorema de Cook-Levin. SAT é NP-completo.

Luís Felipe
28/06/23

# Questão do milênio

$$P = NP?$$

Obs.: Quem responder ganha pelo menos 1 milhão de dólares.

https://www.claymath.org/millennium-problems

https://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem