A Indecidibilidade do Problema da Parada

Luís Felipe

UFF

26 de Junho de 2023

Luís Felipe

26/06/23

Na última aula...

- Definimos a linguagem
  $A_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ é uma MT e M aceita $w\}$
- Definimos conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis
- Mostramos que os Racionais não-negativos são enumeráveis mas os Reais são não-enumeravéis.
- Utilizamos o Método da Diagonalização de Cantor
- Com isso, vamos mostrar que existem linguagens que não são Turing-Reconhecíveis
  - Vamos mostrar que o conjunto formado por MTs é enumerável
  - E o conjunto de todas das linguagens é não-enumerável

Luís Felipe

26/06/23

A conta não fecha

- Nem toda linguagem é Turing-reconhecível

  - Vamos ver que Σ^* é enumerável.
  - Vamos ver que o conjunto de todas as linguagens é não-enumerável enquanto que o conjunto das MT's é enumerável.
    - Parênteses: Não acham estranho?! Uma linguagem é um subconjunto de Σ^*.
    - Σ^* é enumerável e o conjunto de todas as linguagens é não-enumerável.
    - Na verdade, de Análise Matemática, temos que se X for um conjunto infinito, então $\mathcal{P}(X)$ será um conjunto não-enumerável.
  - Como cada MT pode reconhecer uma única linguagem, a conta não fecha.
  - Logo, existem linguagens que não são Turing-reconhecíveis.

Luís Felipe
26/06/23

Nem tudo é Turing-reconhecível

Corolário. Existem linguagens que não são Turing-reconhecíveis.

Ideia: Para mostrar que o conjunto de MTs é enumerável vamos observar 2 aspectos:

1. Cada MT M tem uma codificação em uma string $\langle M \rangle$
2. O conjunto Σ^* é enumerável.
   - Basta notar que o número de cadeias de tamanho i é finito
   - Assim, podemos fazer uma lista com as cadeias de tamanho $0, 1, 2, 3$ etc.
   - Claramente temos uma bijeção com $\mathbb{N}$
   - Dentre todas as cadeias de Σ^*, existem as que não são codificações de MT.
   - Logo, temos uma lista com todas as MTs

Luís Felipe

26/06/23

Ideia - Continuação

Ideia (cont.): Resta, portanto, mostrar que o conjunto das linguagens é não-enumerável. Para tal, note que:

1. O conjunto de todas as sequências binárias infinitas, $\mathcal{B}$ é não-enumerável. (Prova semelhante à prova de que $\mathbb{R}$ é não enumerável)
2. Para mostrar que o conjunto de todas as linguagens $\mathcal{L}$ é não-enumerável, vamos fazer uma correspondência com $\mathcal{B}$
3. Seja $A \in \mathcal{L}$. A será mapeada em $\mathcal{B}$ através de sua sequência característica. Observe o exemplo:

Luís Felipe
26/06/23

Exemplo

A é a linguagem de todas as cadeias que começam por 0.

$$
\begin{array}{lclcccccccccc}
\Sigma^\star & = & \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, & 001, & \dots & \} \\
A & = & \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 001, & \dots & \} \\
\chi_A & = & & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots &
\end{array}
$$

A função que leva $\mathcal{L}$ em $\mathcal{B}$ tal que $f(A)$ é a sequência característica de A, $A \in \mathcal{L}$ é bijetora. Logo, $\mathcal{L}$ é não-enumerável.

Assim, temos mais linguagens do que MTs para reconhecê-las.

Luís Felipe

26/06/23

Indecidibilidade de A_{MT}

$A_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ é uma MT e M aceita $w\}$

- Agora, estamos aptos para provar que A_{MT} é indecidível.

Ideia da prova: Supor que A_{MT} seja decidível. Então existe um decisor H para A_{MT}.

Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, H aceita se, e somente se, M aceitar w. Ou seja:

$$H(\langle M, w\rangle) = \begin{cases} \text{aceite} & \text{se } M \text{ aceita } w \\ \text{rejeite} & \text{se } M \text{ não aceita } w \end{cases}$$

O segundo passo é construir uma MT D que utiliza H como subrotina. D chama H para determinar o que M faz quando $w = \langle M\rangle$. Ou seja, D chama H para rodar $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.

Além disso, D retorna o complemento de H. Ou seja, D aceita sse H rejeita:

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{aceite} & \text{se } M \text{ não aceita } \langle M\rangle \\ \text{rejeite} & \text{se } M \text{ aceita } \langle M\rangle \end{cases}$$

Luís Felipe

26/06/23

Continuação

E se rodarmos D com sua própria descrição?

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{aceite} & \text{se D não aceita } \langle D \rangle \\ \text{rejeite} & \text{se D aceita } \langle D \rangle \end{cases}$$

Ou seja, D rejeita $\langle D \rangle$ exatamente quando D aceita $\langle D \rangle$.

O que é uma contradição. Logo, não existe máquina D e, consequentemente, não existe máquina H.

Resumidamente:

1. H aceita $\langle M, w \rangle$ exatamente quando M aceita w;
2. D rejeita $\langle M \rangle$ exatamente quando M aceita $\langle M \rangle$;
3. D rejeita $\langle D \rangle$ exatamente quando D aceita $\langle D \rangle$.

Ideia similar com o paradoxo do mentiroso.

Luís Felipe
26/06/23

Esquemas

	$\langle M_1\rangle$	$\langle M_2\rangle$	$\langle M_3\rangle$	$\langle M_4\rangle$	$\cdots$
M_1	aceita		aceita		
M_2	aceita	aceita	aceita	aceita	
M_3					$\cdots$
M_4	aceita	aceita			
$\vdots$			$\vdots$		

	$\langle M_1\rangle$	$\langle M_2\rangle$	$\langle M_3\rangle$	$\langle M_4\rangle$	$\cdots$
M_1	aceita	rejeita	aceita	rejeita	
M_2	aceita	aceita	aceita	aceita	
M_3	rejeita	rejeita	rejeita	rejeita	$\cdots$
M_4	aceita	aceita	rejeita	rejeita	
$\vdots$			$\vdots$		

	$\langle M_1\rangle$	$\langle M_2\rangle$	$\langle M_3\rangle$	$\langle M_4\rangle$	$\cdots$	$\langle D\rangle$	$\cdots$
M_1	aceita	rejeita	aceita	rejeita		aceita	
M_2	aceita	aceita	aceita	aceita		aceita	
M_3	rejeita	rejeita	rejeita	rejeita	$\cdots$	rejeita	$\cdots$
M_4	aceita	aceita	rejeita	rejeita	$\ddots$	aceita	
$\vdots$			$\vdots$				
D						?	$\ddots$
$\vdots$			$\vdots$				

Luís Felipe

26/06/23

Uma linguagem Turing-irreconhecível

Teorema. Uma linguagem é decidível sse ela e seu complemento são Turing-reconhecíveis.

Ideia: $(\rightarrow)$ Se A é decidível, então $\overline{A}$ é decidível. O resultado segue diretamente.
$(\leftarrow)$ Se A e $\overline{A}$ são Turing-reconhecíveis então vamos construir um decisor para A simulando as MTs que reconhecem A e $\overline{A}$, M_1, M_2, resp., em uma MT dupla fita M.

- Se M_1 aceitar, M aceita.
- Se M_2 aceitar, M rejeita.

Resta mostrar que M decide A. Toda cadeia w ou está em A ou em $\overline{A}$. Uma vez que M para sempre que M_1 ou M_2 aceitam, M sempre para, e, portanto, é um decisor.

Corolário. $\overline{A_{MT}}$ não é Turing-reconhecível.

Ideia: A_{MT} é Turing-reconhecível. Se $\overline{A_{MT}}$ também fosse Turing-reconhecível, A_{MT} seria decidível.