Lema do Bombeamento para LLC

Luís Felipe

UFF

05 de Junho de 2023

Luís Felipe

05/06/23

Lema do Bombeamento

Se A é uma LLC, então existe um inteiro p, chamado de comprimento do bombeamento, tal que para toda cadeia $s \in A$, $|s| \geq p$, então existe uma decomposição $s = uvxyz$ satisfazendo às condições:

1. para todo $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$.
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

OBS: A condição 2 garante que não pode ocorrer de v e y serem ε. Senão, o Lema seria válido trivialmente.

Luís Felipe
05/06/23

Ideia da prova

Seja A uma LLC e G uma gramática que a gera. Seja s uma cadeia bem longa em A.

Existe uma derivação de s por G, e, portanto, uma AAS para s cuja raiz é o símbolo inicial de G.

Essa AAS é muito alta, porque s é muito longa.

Os nós internos da AAS são variáveis e, como o caminho da raiz às folhas é muito longo, existe pelo menos uma variável $R \in V(G)$ que se repete (pelo princípio da casa dos pombos). Ou seja, temos pelo menos duas R-árvores.

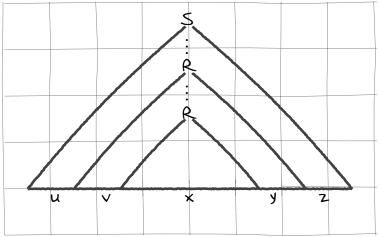
Assim, é possível substituir essa segunda ocorrência da R-árvore pela primeira R-árvore (ou vice e versa) e continuar obtendo uma AAS.

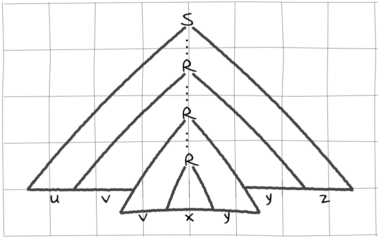
Consequentemente, conseguimos dividir s em 5 partes $uvxyz$ e repetir a segunda e a quarta partes e obter uma cadeia em A.

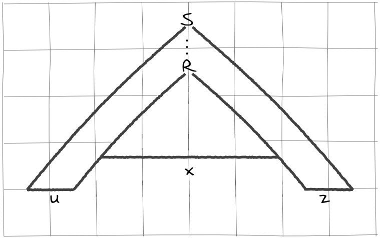
Luís Felipe

05/06/23

Esquemas AAS







Luís Felipe
05/06/23

Demonstração

Prova: Seja G uma gramática que gera a LLC A. Dentre todas as regras de G, seja b o número máximo de símbolos (variáveis + terminais) que aparecem à direita de uma das regras de G.

Ou seja, cada nó em qualquer AAS de G tem no máximo b filhos. Analisando cada nível temos:

1. no máximo b filhos no nível 1;
2. no máximo b^2 filhos no nível 2;
3. de modo geral, no máximo b^h filhos no nível h. (h é a altura da AAS)

Se a altura de qualquer AAS é no máximo h então o comprimento da palavra gerada é no máximo b^h. Ou seja:

Lema. Seja L uma LLC. Se s é uma palavra (colheita) de uma S-árvore de altura h, então $|s| \leq b^h$.

Equivalentemente: Se $|s| > b^h$ (ou seja, $|s| \geq b^h + 1$), então a altura de toda AAS que gera s é maior h.

Luís Felipe
05/06/23

Continuação

Seja V o conjunto das variáveis de G. Escolha $p = b^{|V|+1}$.
(p é o comprimento do bombeamento).

Pelo lema (do slide anterior): se s é palavra com $|s| \geq p$, então toda AAS de s possui altura $h \geq |V| + 1$.

Escolha uma AAS para s com menor número de nós. A altura da AAS é pelo menos $|V| + 1$.

Seja P o caminho da raiz S até uma folha no último nível. (S é a variável inicial de G). P tem pelo menos $|V| + 1$ arestas, logo, P tem pelo menos $|V| + 2$ nós. (sendo pelo menos $|V| + 1$ variáveis e o último nó é ε ou um terminal de Σ)

Pelo Princípio da casa dos pombos, alguma variável dentre as $|V|$ variáveis se repete em P (pois P possui pelo menos $|V| + 1$ variáveis).

Seja R a variável que se repete dentre as $|V| + 1$ variáveis mais perto da folha em P. Continua (de novo)...

Luís Felipe

05/06/23

O que vimos até agora

Revendo:

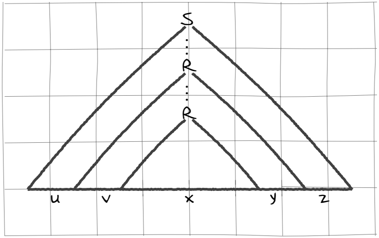
1. Escolhemos $p = b^{|V|+1}$. Essa escolha foi importante para garantir a repetição de variáveis em qualquer AAS que gera s;
2. Tomamos P o maior caminho da raiz até uma folha da AAS de s com o menor número de nós. Por conta de p, há pelo menos $|V| + 1$ variáveis em P;
3. Logo, há ao menos uma variável se repetindo em P. Tomamos R a primeira variável a se repetir de baixo para cima em P. (Ou seja, R é a primeira variável que você reencontra ao percorrer P a partir da folha).
4. Sobre P:
   - número de arestas: $h \geq |V| + 1$
   - número de nós: pelo menos $|V| + 2$
   - número de variáveis de V em P: pelo menos $|V| + 1$

Luís Felipe

05/06/23

Continuação

Considere as duas ocorrências de R a partir da folha de P.



- x é a cadeia gerada pela R-subárvore da 1^a ocorrência a partir da folha.
- vxy é a cadeia gerada pela R-subárvore da 2^a ocorrência a partir da folha contendo x como subpalavra. Além disso, a cadeia vxy é subpalavra de s, gerada pela AAS.

Assim, temos que $s = uvxyz$.

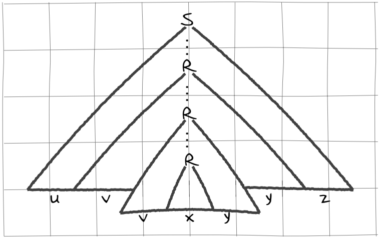
Luís Felipe

05/06/23

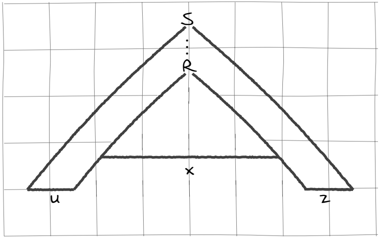
Concluindo

Para a condição 1. do lema do bombeamento (palavras bombeadas), substitua uma R-subárvore por outra:

- Substituindo a menor pela maior, obtemos uma AAS para $uv^ixy^iz, i > 0$.



- Substituindo a maior pela menor, obtemos uma AAS para uxz, logo, $i = 0$.



Para a condição 2. do lema do bombeamento ($|vy| > 0$), assuma $v = y = \varepsilon$. Substituindo a menor R-subárvore pela maior, obtemos uma AAS com menos folhas que gera s (absurdo pela minimalidade de AAS de s).

Luís Felipe
05/06/23

Agora sim concluindo...

Para a condição 3. do lema do bombeamento ($|vxy| \leq p$), consideramos R-subárvores que gera vxy.

A escolha da variável R diz que a altura desta R-subárvore é no máximo $|V| + 1$.

Provamos (lema provado logo no início da demonstração) que se a altura de qualquer AAS de s é no máximo $|V| + 1$ então a palavra gerada possui comprimento no máximo $b^{|V|+1} = p$.

$\square$

Luís Felipe

05/06/23

Exemplo

Mostre que $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ não é uma LLC.

Assume que L seja LLC, logo L satisfaz o lema do bombeamento.

Seja p o comprimento do bombeamento e tome $s = a^p b^p c^p$.

Vamos mostrar que para toda decomposição de s satisfazendo 2. e 3., existe i com $uv^i xy^i z \notin L$.

Como qualquer decomposição satisfaz $|vxy| \leq p$ (condição 3.), logo vxy não contém os 3 símbolos a, b e c.

Logo, como $|vy| > 0$ (condição 2.), temos que $s' = uv^2xy^2z$ não contém o mesmo número de a's, b's e c's. Portanto, $s' \notin L$.

Assim, L não é LLC.

Luís Felipe

05/06/23

OBS 1

Considere $L_1 = \{a^n b^n c^m \ : \ n, m \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^m c^m \ : \ n, m \geq 0\}$.

- L_1 e L_2 são linguagens livres do contexto (vimos GLC's para elas em aulas passadas, lembre do fechamento da concatenação para LLC usando GLC's).
- $L = L_1 \cap L_2$, onde $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$.
- Acabamos de provar que L não é LLC. Portanto, LLC não é fechada por interseção.

Luís Felipe
05/06/23

OBS 2

Pela Lei de De Morgan, LLC também não é fechada por complemento nem por diferença.

- Complemento: Suponha que L seja fechada por complemento. Logo, dados L_1 e L_2 LLC's, $\overline{L_1}$ e $\overline{L_2}$ são LLC's. Assim, $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ é LLC (fechamento da união visto em aulas anteriores), e portanto, $\overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ é LLC. Dessa forma, temos uma contradição, pois $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ (Lei de De Morgan), e vimos que LLC não é fechada por interseção.

- Diferença: Suponha que LLC é fechada por diferença. Dado L uma LLC, temos que $\Sigma^* - L$ é LLC (por hipótese). Porém isso contraria a afirmação anterior, pois $\Sigma^* - L = \overline{L}$.