Autômatos com pilha

Luís Felipe

UFF

29 de Maio de 2023

Luís Felipe
29/05/23

Breve contextualização

- Nas aulas passadas vimos que nem toda linguagem é regular.
- Inclusive, apresentamos um exemplo de linguagem que não é regular e é LLC, $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Sabemos que uma linguagem é regular se tem um autômato finito que a reconheça, ou ainda, se tem uma gramática regular que a gere (equivalência)
- Também sabemos que uma linguagem é LLC se existe uma GLC que a gere.
- Vamos, portanto, introduzir a máquina que reconhece uma LLC: autômato com pilha

Luís Felipe

29/05/23

Autômato com pilha

- Um autômato com pilha (AP) é basicamente um autômato finito não determinístico com uma estrutura auxiliar denominada pilha (LIFO).
- A pilha pode armazenar uma quantidade ilimitada de informação.
- Por isso, algumas linguagens que não são regulares podem ser reconhecidas por um autômato com pilha.
- Os autômatos com pilha são equivalentes em poder às GLC's.
  - Assim, temos duas opções para mostrar que uma linguagem é LLC: a GLC ou o AP
- O AP pode escrever símbolos na pilha e consultá-los a posteriori.
- Escrever na pilha = empilhar
  Remover da pilha = desempilhar

Luís Felipe
29/05/23

Como seria?

- Como seria o AP para reconhecer $L = \{0^n1^n | n \geq 0\}$?

1. A medida que os zeros são lidos, são empilhados.
2. Assim que o primeiro 1 é lido, o 0 no topo da pilha é desempilhado.
3. A cada 1 lido, um 0 é desempilhado.
4. Se a pilha fica vazia e ainda existem 1's na entrada, ou se os 1's acabam e a pilha ainda possui 0's, ou se após o último 1 lido da entrada há um símbolo qualquer, então a palavra não é aceita.

Luís Felipe
29/05/23

Formalizando...

Um autômato com pilha é uma 6-upla $(\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta)$ tal que:

- Σ é o alfabeto da entrada
- Γ é o alfabeto da pilha
- Q é o conjunto de estados
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial
- F é o conjunto de estados finais
- δ é a função de transição
  $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$,

  relembrando: $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$.

Luís Felipe
29/05/23

Entendendo a função de transição...

- $p, q \in Q, \quad \sigma \in \Sigma_\varepsilon, \quad \gamma \in \Gamma_\varepsilon, u \in \Gamma_\varepsilon$
- $(p, u) \in \delta(q, \sigma, \gamma)$ significa que quando o AP está no estado q, lendo σ na entrada e γ no topo da pilha, então ele muda para o estado p e empilha u (substituindo γ).
- E quanto a ε??

Caso	Interpretação
$\sigma = \varepsilon$	entrada não consultada
$\gamma = \varepsilon$	topo da pilha não consultado
$\sigma = \gamma = \varepsilon$	entrada e topo da pilha não consultados
$\gamma \neq \varepsilon$ e $u = \varepsilon$	desempilha $\gamma \in \Gamma$
$\gamma = \varepsilon$ e $u \neq \varepsilon$	empilha u
$\gamma \neq \varepsilon$ e $u \neq \varepsilon$	desempilha γ empilha u

Luís Felipe
29/05/23

Computação de um AP

- Seja $M = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, F, \delta)$

- Uma palavra $w = w_1 w_2 \dots w_m$, $w_i \in \Sigma_\varepsilon$ é aceita, se existem uma sequência de estados $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \dots, s_m \in \Gamma^\star$ que satisfazem as 3 condições a seguir. As cadeias s_i representam a sequência do conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

  1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$ (estado inicial + pilha vazia)
  2. Para $i = 0, \dots, m-1$, temos $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, onde $s_i = at$ e $s_{i+1} = bt$, $a, b \in \Gamma$ e $t \in \Gamma^\star$. (M se move de estado em estado de acordo com a pilha e o símbolo lido)
  3. $r_m \in F$ (estado final quando entrada é completamente lida)

Luís Felipe
29/05/23

Pilha vazia

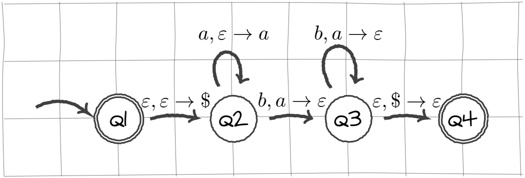
- Como testar se a pilha está vazia?
  - Na descrição do autômato não há nada que indique que a pilha está vazia
  - Assim, marcaremos o início da pilha com o símbolo $\$$
  - Toda vez que o autômato se deparar com esse símbolo, entenderá que a pilha está vazia.

Luís Felipe
29/05/23

Exemplos

1. $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

   - $\Sigma = \{a, b\}$
   - $\Gamma = \{a, \$\}$
   - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
   - $F = \{q_1, q_4\}$



δ	estado	entrada	topo	trans	comentário
	q_1	ε	ε	$(q_2, \$)$	vai para q_2 e empilha \$
	q_2	a	ε	(q_2, a)	empilha a
	q_2	b	a	(q_3, ε)	vai para q_3 e desempilha a
	q_3	b	a	(q_3, ε)	desempilha a
	q_3	ε	\$	(q_4, ε)	vai para q_4 e desempilha \$

Luís Felipe

29/05/23

Exemplos

2. $L = \{w \in \{a, b, c\}^\star \mid w = vcv^R, v \in \{a, b\}^\star\}$
   - $\Sigma = \{a, b, c\}$
   - $\Gamma = \{a, b, \$\}$
   - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
   - $F = \{q_4\}$

δ	estado	entrada	topo	trans	comentário
	q_1	ε	ε	$(q_2, \$)$	vai para q_2 e empilha \$
	q_2	a	ε	(q_2, a)	empilha a
	q_2	b	ε	(q_2, b)	empilha b
	q_2	c	ε	(q_3, ε)	vai para q_3
	q_3	a	a	(q_3, ε)	desempilha a
	q_3	b	b	(q_3, ε)	desempilha b
	q_3	ε	\$	(q_4, ε)	vai para q_4 e desempilha \$

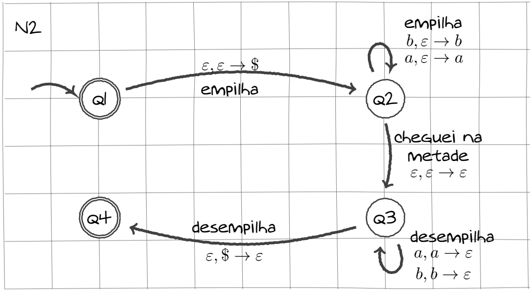
Luís Felipe

29/05/23

Exemplos

3. $L = \{vv^R \mid v \in \{a, b\}^\star\}$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a, b, \$\}$
- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $F = \{q_1, q_4\}$



δ	estado	entrada	topo	trans	comentário
	q_1	ε	ε	$(q_2, \$)$	vai para q_2 e empilha \$
	q_2	a	ε	(q_2, a)	empilha a
	q_2	b	ε	(q_2, b)	empilha b
	q_2	ε	ε	(q_3, ε)	vai para q_3
	q_3	a	a	(q_3, ε)	desempilha a
	q_3	b	b	(q_3, ε)	desempilha b
	q_3	ε	\$	(q_4, ε)	vai para q_4 e desempilha \$

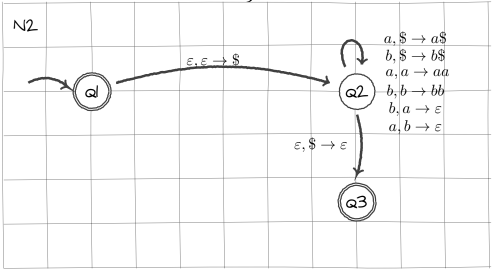
Luís Felipe

29/05/23

Exemplos

4. $L = \{w \mid w$ tem número igual de a's e b's$\}$

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a, b, \$\}$
- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $F = \{q_1, q_3\}$



δ	estado	entrada	topo	trans	comentário
	q_1	ε	ε	$(q_2, \$)$	vai para q_2 e empilha $\$$
	q_2	a	$\$$	(q_2, a)	empilha a
	q_2	b	a	(q_2, ε)	desempilha a
	q_2	b	$\$$	(q_2, b)	empilha b
	q_2	a	b	(q_2, ε)	desempilha b
	q_2	ε	$\$$	(q_3, ε)	vai para q_3 e desempilha $\$$

Luís Felipe

29/05/23

Exemplos

5. $L = \{a^i b^j c^k \mid i, \overset{j}{\cancel{k}}, k \geq 0,\ i = j \text{ ou } i = k\}$