Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Lista 7 – Planaridade

1. Seja G um grafo conexo planar com 25 arestas e 17 faces. Qual o número de vértices de G? Justifique.

   Resolução: Pela fórmula de Euler, $n - m + f = 2$. Portanto, $n - 25 + 17 = 2$, ou seja, $n = 10$.

2. Seja G um grafo conexo, planar, 3-regular com 21 arestas. Determine o número de faces de G.

   Resolução: Como G é 3-regular e possui 21 arestas, pelo lema do aperto de mãos, temos que $3n = 2.21$ e assim $n = 14$. Pela fórmula de Euler, $n - m + f = 2$. Portanto, $14 - 21 + f = 2$, ou seja, $f = 9$.

3. Seja G um grafo planar conexo com sequência de vértices $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 5)$. Em quantas regiões qualquer representação plana de G divide o plano?

   Resolução: Pela sequência de graus, temos que $n = 7$, $2+2+3+3+3+4+5 = 2m$ e assim $m = 11$. Agora basta obter o número de faces de G, $7 - 11 + f = 2$ e assim $f = 6$.

4. Qual número máximo de arestas de um grafo planar com $n = 7$?

   Resolução: Seja G um grafo planar, temos que $m \leq 3n - 6$, pelo Corolário 9 visto na aula 12. Logo, G possui número máximo de arestas quando $m = 3n - 6$. Como $n = 7$, temos que $m = 15$.

5. Mostre que um grafo planar bipartido com n vértices possui no máximo $2n - 4$ arestas.

   Resolução: Como G é planar e bipartido, temos que G não possui triângulos. Portanto $m \leq 2n - 4$, pelo Corolário 10 visto na aula 12.

6. Encontre um grafo que possua $m \leq 3n - 6$ e não seja planar.

   Resolução: $K_{3,3}$, já que $m = 9$ e $n = 6$, assim $9 \leq 12$.

7. O grafo de Petersen é planar?

   Resolução: Não, basta exibir uma subdivisão do $K_{3,3}$.

8. Mostre que se G é um grafo simples e planar com $n \geq 11$, então $\overline{G}$ é não planar.

   Resolução: Por contradição, suponha G e $\overline{G}$ grafos planares com $n \geq 11$. Sejam m e m' a quantidade de arestas de G e de $\overline{G}$. Com isso, $m \leq 3n - 6$ e $m' \leq 3n - 6$. Como $m + m' = \frac{n(n-1)}{2}$, temos que: $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2(3n - 6)$.

Com isso, $n(n-1) \leq 12n - 24$, e ainda: $n^2 - n - 12n \leq -24 \therefore n^2 - 13n + 24 \leq 0$. Note que como $n \geq 11$, então $n^2 - 13n + 24 > 0$, o que é uma contradição.