



Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 6 – Coloração de vértices

1. Mostre que se quaisquer dois ciclos ímpares de G têm um vértice em comum então $\chi(G) \leq 5$.

Resolução: Removamos um ciclo ímpar do grafo, temos que o grafo resultante é bipartido (já que removemos também o vértice comum aos demais ciclos ímpares do grafo) e portanto 2 colorível. Atribua agora 3 novas cores para o ciclo ímpar removido, e temos assim uma 5 coloração própria.

2. Uma coloração gulosa é aquela que utiliza a menor cor possível para um vértice. Mostre que todo grafo G tem uma ordenação de vértices em relação a qual a coloração gulosa usa apenas $\chi(G)$ cores.

Resolução: Seja o grafo G $\chi(G)$ -cromático. Então existe uma partição P de vértices deste grafo em $\chi(G)$ conjuntos independentes, onde $P = P_1, P_2, P_{\chi(G)}$. Uma ordenação gulosa que nos forneceria uma $\chi(G)$ coloração, seria a escolha dos vértices de P_1 , depois os vértices de P_2 , e assim por diante. Como os vértices não tem restrições entre vértices do mesmo conjunto independente, todos eles permanecem com a mesma cor, e como todas os vértices com cores anteriores já foram coloridos, os vértices do conjunto independente P_i têm restrições a cores dos conjuntos independentes anteriores e recebem a cor i . No final, se o algoritmo guloso utilizar esta ordenação, teremos uma $\chi(G)$ -coloração.

3. Sabendo que todo grafo k -cromático possui pelo menos k vértices de grau pelo menos $k - 1$, mostre que todo grafo G satisfaz $\chi \leq \Delta + 1$.

Resolução: G é χ -cromático, então G possui pelo menos χ vértices de grau pelo menos $\chi - 1$. Ou seja, se G tem vértice de grau pelo menos $\chi - 1$ então Δ é pelo menos $\chi - 1$. Assim, $\Delta \geq \chi - 1$ e portanto, $\chi \leq \Delta + 1$.

4. Qual número cromático do grafo completo e do ciclo ímpar? Justifique.

Resolução: Temos que para $\chi \leq \Delta + 1$ para qualquer grafo G . Pelo Teorema de Brooks, se G não é um grafo completo e nem um ciclo ímpar, então $\chi \leq \Delta$. Portanto, se G é um grafo completo ou um ciclo ímpar, temos que $\chi = \Delta + 1$.

5. Se G possui a maior clique de tamanho ω , temos que $\chi \geq \omega$.

- (a) Dê exemplo de um grafo ω -colorível.

Resolução: Ciclos pares. Possuem $\omega = 2$ e são 2-coloríveis

(b) Dê exemplo de um grafo não ω -colorível.

Resolução: Ciclos ímpares com $|V| > 3$. Possuem $\omega = 2$ e são 3-coloríveis.