Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Lista 5 – Coloração de arestas

1. Mostre que se G é bipartido regular então $\chi' = \Delta(G)$.

   Resolução: Como G é bipartido e $\Delta(G)$-regular, temos que cada parte possui mesmo número de vértices. Tome um emparelhamento perfeito em G, atribua uma cor às arestas e remova esse emparelhamento do grafo. Temos que o grafo resultante é $\Delta(G) - 1$-regular, Tome um emparelhamento perfeito nesse grafo e associemos uma nova cor às arestas desse emparelhamento. Repitamos este processo e após Δ passos, teremos todas as arestas propriamente coloridas.

2. Usando Exercício 1, mostre que se G é bipartido então $\chi' = \Delta(G)$.

   Resolução: Dado G bipartido com grau máximo Δ, obtenha supergrafo G' de modo que G' seja bipartido regular. Este processo é obtido pela inclusão de arestas entre vértices de G e eventualmente também por inclusão de vértices para que G' seja Δ-regular. Como mostrado no Exercício 1, G' possui $\chi' = \Delta(G')$. Como G é subgrafo de G' e $\Delta(G) = \Delta(G')$, temos que G possui $\chi' = \Delta(G)$.

3. Dê exemplo de um grafo que seja regular e $\Delta + 1$ aresta colorível.

   Resolução: C_3 possui $\Delta = 2$ e é 3 aresta colorível. Outro exemplo é o grafo de Petersen, possui $\Delta = 3$ e 4 aresta colorível. Uma maneira de mostrar é verificar a não possibilidade de uma 3 aresta coloração.

4. Um grafo $G(V, E)$ é chamado *overfull* quando $|E| > \Delta\lfloor\frac{|V|}{2}\rfloor$. Se G é overfull então G é classe 2, i.e. G é $(\Delta + 1)$-aresta colorível.

   (a) Dê exemplo de um grafo overfull.

   Resolução: C_3 possui 3 arestas e $\Delta\lfloor\frac{|V|}{2}\rfloor = 2.\lfloor\frac{3}{2}\rfloor = 2$.

   (b) Dê exemplo de um grafo não overfull e classe 2.

   Resolução: Grafo de Petersen. 15 arestas, $\Delta = 3$ e $|V| = 10$.

5. Mostre que se G é não vazio regular com $|V|$ ímpar, então $\chi' = \Delta + 1$. *Resolução:* Basta mostrar que G é overfull. Seja G um grafo r-regular e $|V| = 2q + 1$. Pelo Lema do Aperto de mãos temos que r é par e $|E| = \frac{r(2q+1)}{2}$. Façamos $\Delta\lfloor\frac{|V|}{2}\rfloor$ e vemos que $\Delta\lfloor\frac{|V|}{2}\rfloor = rq$. Assim, $|E| = \frac{r(2q+1)}{2} = rq + \frac{r}{2} > rq$.

6. Seja G um grafo cúbico Hamiltoniano. Mostre que $\chi'(G) = 3$.

   Resolução: Como G é cúbico, então G possui um número par de vértices. Como G é Hamiltoniano, colora o ciclo par de G com duas cores, remova este ciclo do grafo, e temos que o grafo resultante é um emparelhamento perfeito, com isso dê uma nova cor a este emparelhamento e temos portanto que $\chi'(G) = 3$.

7. O produto de dois grafos G e H é o grafo $G \times H$ com conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ e o vértice (u, v) é adjacente ao par (u', v') se, e somente se, ou $u = u'$ e $vv' \in E(H)$, ou $v = v'$ e $uu' \in E(G)$. Mostre que $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$.

   Resolução: O grafo $G \times K_2$ pode ser construído pela união de duas cópias de G e adição de um emparelhamento perfeito entre vértices correspondentes. Esse emparelhamento é justamente uma cor para $G \times K_2$ distinta das cores utilizadas em G. $\Delta(G \times K_2) = \Delta(G) + 1$, por construção. Se G é classe 1, então colora as duas cópias de G com Δ cores e utilize mais uma para colorir o emparelhamento. Se G é classe 2, então note que em cada cópia de G, todo vértice possui uma cor não representada, pois seu grau é no máximo $\Delta(G)$ e temos $\Delta(G) + 1$ cores utilizadas em sua coloração. Assim, colora as duas cópias com a mesma $\Delta(G) + 1$-coloração, e para cada aresta do emparelhamento, colora com a cor não representada nos vértices.