Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 4 – Teoria dos Grafos: Emparelhamento e Cobertura

1. Para quais valores de n o grafo completo K_n possui um emparelhamento perfeito?

   Resolução: Para todo n par.

2. Exiba um grafo com n par que não possui um emparelhamento perfeito.

   Resolução: O grafo da figura abaixo.

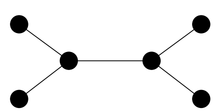

Figura 1: Grafo da questão 2.

3. Dê uma condição suficiente para que um grafo com n vértices, com n par, não possua um emparelhamento perfeito.

   Resolução: Basta tomar um grafo bipartido com partes X e Y de modo que $|Y| = 3|X|$ e cada subconjunto $S \subseteq X$ satisfaça o Teorema de Hall. Temos que todo vértice de X é saturado, portanto $\alpha' = |X| \leq \frac{n}{2}$.

4. Considere a seguinte afirmação: Todo grafo G com n par que possui como subgrafo induzido o grafo bipartido completo $K_{1,3}$ não possui

um emparelhamento perfeito. Se esta afirmação for verdadeira, prove. Caso contrário, exiba um contra-exemplo.

Resolução: O grafo da figura abaixo.

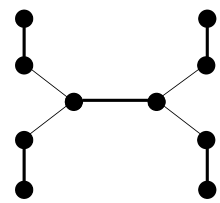

Figura 2: Grafo da questão 4. Emparelhamento perfeito dado pelas arestas em negrito.

5. Encontre um emparelhamento perfeito para o grafo k-cubo.

   Resolução: O grafo k-cubo pode ser construído de forma indutiva pela união de dois $(k-1)$-cubos acrescido de um emparelhamento perfeito entre os vértices associados de cada $(k-1)$-cubo. Portanto, há um emparelhamento perfeito pela própria construção do grafo.

6. Mostre que se G é Hamiltoniano e 3-regular então G tem um emparelhamento perfeito.

   Resolução: Como G é 3-regular, G possui um número par de vértices (aplicação do lema do aperto de mãos). G é Hamiltoniano, removamos então as arestas do ciclo de G. Assim, cada vértice passa a ter grau 1, correspondendo um emparelhamento perfeito.

7. Prove ou refute: Todo grafo com emparelhamento perfeito possui $\beta = \frac{n}{2}$.

   Resolução: Falso. Exemplo visto na aula 12.