Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Gabarito (sketch de demonstrações) Lista 3 – Teoria dos Grafos: Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

1. Para quais valores de n o grafo completo K_n é Euleriano?

   Resolução: Para todo n ímpar, já que assim todos os vértices possuem grau par.

2. Mostre que todo grafo bipartido completo regular é Hamiltoniano.

   Resolução: Sabemos que todo grafo bipartido completo $K_{p,q}$ regular possui $p = q$, logo todo vértice possui grau igual a metade do número de vértices. Portanto, pelo Teorema de Dirac temos que este grafo é Hamiltoniano. *Outra maneira:* basta exibir o ciclo Hamiltoniano.

3. Exiba, se possível, um grafo Euleriano que possua um número par de vértices e um número ímpar de arestas. Se não for possível, explique porque não existe tal grafo.

   Resolução: Basta identificar um vértice de um C_4 com um vértice de um C_3. Conforme exibido na Figura 1.

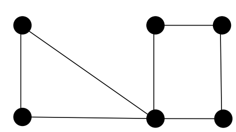


Figura 1: Grafo da questão 3.

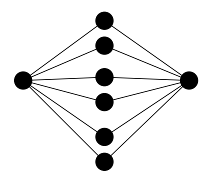
4. Mostre que se G é Euleriano, então todo bloco de G é Euleriano.

   Resolução: Por contrapositiva. Ou seja, se G possui um bloco que não é Euleriano, então G não é Euleriano. Se G possui algum bloco que não é Euleriano, então neste bloco há algum vértice de grau ímpar. Como um bloco é um subgrafo conexo, então há um número par de vértices de grau ímpar nesse bloco (em qualquer bloco, na verdade). Tome dois blocos de G com interseção em um vértice de modo que ao menos um dos blocos não seja Euleriano. Se em ao menos um dos blocos o vértice da interseção possui grau par, então G permanece com vértices de grau ímpar e com isso G não é Euleriano. Se em cada bloco o vértice da interseção possui grau ímpar, então em G este vértice possui grau par, porém há pelo menos outro vértice de grau ímpar em cada um dos blocos. Caso identifiquemos cada um desses vértices de grau ímpar com vértices de outros blocos de grau ímpar, vemos sempre novos vértices de grau ímpar existentes e necessariamente temos que: ou sempre deve haver novos blocos (mas G é finito, logo G não é Euleriano), ou então dois blocos B_1 e B_2 já identificados cada um com outros blocos previamente devem ser identificados entre si, o que correspondem em G um bloco maior, logo B_1 e B_2 não são maximais, contrariando B_1 e B_2 serem blocos. Portanto G não é Euleriano.

5. Se G é um grafo bipartido e possui 15 vértices, então o que se pode afirmar: G é Hamiltoniano? G não é Hamiltoniano? nada se pode afirmar?

   Resolução: G não é Hamiltoniano. Seja G um grafo bipartido com 15 vértices. Se G fosse Hamiltoniano, então haveria um ciclo de tamanho 15, absurdo pelo fato de G ser bipartido e portanto não possuir cilos ímpares.

6. O grafo da figura abaixo é Hamiltoniano? Justifique.



   Resolução: Não. Observe que todo ciclo tem tamanho 4. Logo, não existe ciclo que inclua todos os vértices do grafo sem repetir vértices.

7. Se G é um grafo Euleriano e e_1 e e_2 são arestas de G com um mesmo extremo, então G possui um ciclo Euleriano de modo que e_1 e e_2 aparecem consecutivos?

   Resolução: Nem sempre isto é verdade. Seja G o mesmo grafo apresentado no Exercício 3 de modo que e_1 e e_2 são arestas do C_4 com vértice de extremo sendo o vértice de corte do grafo (Figura 2).

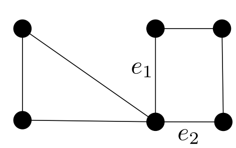


Figura 2: Grafo da questão 7.

8. Mostre que se G é 2-conexo, então quaisquer 2 vértices de G pertencem a um ciclo.

   Resolução: Questão da AVON 2.