Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 2 – Teoria dos Grafos: Árvores e Conectividade

1. Mostre que qualquer árvore não trivial possui pelo menos dois vértices de grau 1 por duas formas a seguir:

   (a) pelo argumento visto na aula 5 elaborado por vocês de modo colaborativo.

   (b) utilizando resultado da questão 18 da lista 1.

2. Sejam T e T' árvores geradoras de um grafo conexo G. Mostre que se $e \in E(T) - E(T')$, então existe uma aresta $e' \in E(T') - E(T)$ tal que $T - e + e'$ é uma árvore geradora de G.

   Resolução: Como toda aresta de uma árvore é uma aresta de corte (caso contrário haveria um ciclo), sejam U e U' duas componentes conexas de $T - e$. Como T' é conexa, existe uma aresta e' em T' com extremos em U e U'. Assim, $T - e + e'$ é conexa e possui $n(G) - 1$ arestas, ou seja, é árvore geradora de G.

3. Seja G um grafo. Sabemos que se G é uma árvore então $m = n - 1$. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

   Resolução: Basta exibir um contra-exemplo, por exemplo $K_3 \cup K_2$.

4. Mostre que se G é conexo, então $E(G) \geq V(G) - 1$.

   Resolução: Se G é conexo, então G possui uma árvore geradora T, com isso $E(G) \geq E(T) = V(T) - 1 = V(G) - 1$.

5. Mostre que uma sequência de graus $(d_1,\ d_2, \ldots, d_n)$ é de uma árvore se e somente se $\sum_i^n d_i = 2(n-1)$.

   Resolução: $(\rightarrow)$ Toda árvore possui $m = n-1$ arestas e pelo Lema do Aperto de M„os, temos que $\sum_i^n d_i = 2m$.

   $(\leftarrow)$ Tomemos o grau médio do grafo G da sequência de graus apresentada, o grau médio é: $\frac{\sum_i^n d_i}{n} = \frac{2(n-1)}{n} = 2 - \frac{2}{n}$. Ou seja, a média dos graus é menor do que 2. Com isso, necessariamente há pelo menos um vértice de grau 1. Façamos o seguinte procedimento: removamos este vértice de grau 1 do grafo e vamos obter o grau médio. Observe que a remoção do vértice de grau 1 implica na remoção também de uma aresta (com uma extremidades no vértice de grau 1 e mais algum vértice que teve remoção em uma unidade no grau). Assim, $\frac{2(n-1)-2}{n} = 2 - \frac{4}{n}$. Novamente, vemos que há ao menos um vértice de grau 1. Repitamos este procedimento, e vemos que há vértices de grau 1 em $n-1$ passos. Ou seja, este procedimento está removendo folhas e no grafo resultante ainda há folhas. No fim há um ˙nico vértice no grafo. Concluímos assim que G é uma árvore, já que G possui $n-1$ arestas (vistas pelas remoções de cada aresta em $n-1$ passos) e G é conexo, já que em cada passo tomamos vértice de grau 1 e sempre há vértice de grau 1 para ser tomando.

6. Mostre que se G é uma floresta então $E(G) = n - \omega(G)$, onde $\omega(G)$ é o número de componentes conexas de G.

   Resolução: Basta somar o número de arestas entre todas as árvores de G.

7. Seja G conexo com $n \geq 3$. Mostre que:

   (a) Se G possui uma aresta de corte então G possui um vértice v tal que $w(G-v) > w(G)$.

   Resolução: Basta tomar o vértice v que seja extremo da aresta de corte.

   (b) Mostre que a recíproca do item (a) não é necessariamente verdadeira.

   Resolução: Basta exibir um contra-exemplo de um grafo que possua um vértice de corte, mas que não possua uma aresta de corte. Por exemplo, o grafo da Figura 1.

8. Obtenha um grafo que satisfaça $\kappa < \kappa' < \delta$.

   Resolução: Visto em aula.

9. Mostre que se G satisfaz $\delta \geq n-2$, então $\kappa = \delta$.

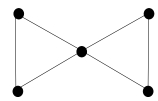

Figura 1: Grafo da questão 7b.

Resolução: Se $\delta = n - 1$, então G é completo e portanto temos o resultado. Se $\delta = n - 2$, a remoção de $n - 3$ vértices não desconecta o grafo, pois os três vértices restantes formam um grafo G' com $\delta(G') = 1$, logo $\kappa(G) = n - 2 = \delta(G)$.