Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Teoria dos Grafos
Professor: Luís Felipe

Gabarito (sketch de demonstrações) Lista 1 – Teoria dos Grafos: Conceitos básicos

1. Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e m arestas. Mostre que:
   (a) $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
   (b) Se G é um grafo bipartido então $m \leq \frac{n^2}{4}$.

2. Classifique cada uma das afirmações como **Verdadeira** ou **Falsa**, justificando convenientemente:
   (a) Se G e H têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas então eles são isomorfos.

   Resolução: Falsa. Exemplos são P_4 e S_3.

   (b) Se G e H são isomorfos então eles têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas.

   Resolução: Verdadeira. Imediato.

   (c) Se G e H são isomorfos então eles têm a mesma sequência de graus.

   Resolução: Verdadeira. Imediato.

   (d) Se G e H têm a mesma sequência de graus então eles são isomorfos.

   Resolução: Falsa. Sejam G e H subgrafos do cubo Q_3 de modo que em G duas arestas de "diagonais próximas" sejam removidas e em H duas arestas de "diagonais opostas" sejam removidas. Suas sequências de graus são iguais a $(2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$.

3. O k-cubo (Q_k) é um grafo (simples) cujos vértices são strings binárias (strings de 0s e 1s) de tamanho k, tal que dois vértices são adjacentes se e se somente se diferem em exatamente uma coordenada.
   (a) Desenhe Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.
   (b) Qual é o número de vértices e arestas de cada um desses grafos?

(c) Qual é o número de vértices e arestas de Q_k?

Resolução: $n = 2^k$, pelo Princípio Multiplicativo e $m = k2^{k-1}$, já cada string possui k novas strings diferindo em somente uma coordenada e Q_k é k-regular, assim $m = \frac{k2^k}{2}$.

(d) Mostre que Q_k é um grafo bipartido.

Resolução: Basta exibir partição de G em X e Y de modo que X possua os vértices com número par de 0s e Y possua os vértices com número ímpar de 0s. Como todo vizinho de um vértice em X possui necessariamente número ímpar de 0s e todo vizinho de um vértice em Y possui necessariamente número par de 0s, temos que de fato $X \cup Y$ é uma bipartição de Q_k.

4. Mostre que em um grafo simples finito com $n \geq 2$, sempre há ao menos dois vértices com mesmo grau.

Resolução: (Contrapositiva) Suponha uma sequência de graus de um grafo com n vértices e cada elemento com valor distinto. Assim, necessariamente há todos os números entre 0 e $n - 1$. Só que há uma inconsistência, já que ambos os graus 0 e $n - 1$ não podem ser associados como graus de vértices de um mesmo grafo com n vértices.

5. Mostre que se G é simples com diâmetro 2 e $\Delta = n - 2$ então $m \geq 2n - 4$.

Resolução: (Construtiva) Tome um vértice u e torne-o vizinho a $\Delta = n-2$ vértices, note que após isto há um único vértice isolado v, e quaisquer outros dois vértices possuem distância no máximo 2. Para termos diâmetro 2, para o vértice v é necessário criar uma nova aresta para algum vértice de $V \backslash \{u\}$. Isto devido se v fosse vizinho a u, o grau de v seria $n - 1$. Logo, tomemos v vizinho a um único vértice de $V \backslash \{u\}$, isto faz com que o diâmetro do grafo se torne 3. Para termos diâmetro 2 é necessário fazer v vizinho a todos os vértices de $V \backslash \{u\}$. Portanto, temos $m \geq 2(n - 2)$.

6. Mostre que se G é simples e $\delta > \frac{n}{2} - 1$ então G é conexo.

Resolução: (Construtiva) Tome um vértice u e torne-o vizinho a δ vértices, note que agora há $n - \delta - 1 < \frac{n}{2} - 1$ vértices isolados. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, é necessário que cada um destes vértices seja vizinho a algum dos vértices não isolados do primeiro passo.

7. Exiba um grafo $(\frac{n}{2} - 1)$-regular desconexo, para n par.

Resolução: Dois exemplos: $2K_2$, $2K_3$.

8. Mostre que todo grafo com n vértices é isomorfo a um subgrafo de K_n.

Resolução: Seja G um grafo com n vértices, temos que $G \cup \overline{G} = K_n$ e assim $G \approx K_n \backslash \overline{G}$.

9. Mostre que todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.

Resolução: Segue da definição de subgrafo induzido.

10. Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.

Resolução: Segue da definição de grafo bipartido.

11. O grafo linha de um grafo G é o grafo $L(G)$ com conjunto de vértices igual a $E(G)$ e dois vértices são vizinhos se e somente se elas são arestas incidentes a um mesmo vértice em G. Mostre que $E(L(G)) = \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)(d(v)-1)}{2}$.

    Resolução: Observe que cada aresta de G é um vértice de $L(G)$, e para cada vértice v de G existem $d(v)(d(v)-1)$ pares de vértice vizinhos em $L(G)$. Somando para todos vértices de G, e pelo Teorema do aperto de mãos, temos $\sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)(d(v)-1)}{2}$.

12. Mostre que dois caminhos quaisquer de comprimento máximo em um grafo G conexo possuem necessariamente algum vértice em comum.

    Resolução: (Contradição) Ao tomar dois caminhos máximos de modo que não haja vértice em comum, há um caminho entre dois vértices dos dois caminhos distintos, já que o grafo é conexo. Assim, há um caminho maior do os caminhos máximos tomados inicialmente, há assim uma contradição.

13. Um grafo (simples) é auto-complementar se $G \approx \overline{G}$.

    (a) Dê dois exemplos de grafos auto-complementares.

    Resolução: P_4, C_5.

    (b) Prove que um grafo auto-complementar tem $4k$ ou $4k+1$ vértices, para k um inteiro não negativo.

    Resolução: Se um grafo G é auto-complementar então G e $\overline{G}$ possuem mesmos números de vértices e mesmos números de arestas. No grafo completo há $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, como em G e $\overline{G}$ há o mesmo número de arestas, em cada um dos grafos há $\frac{n(n-1)}{4}$ arestas. Com isso, ou n ou $n-1$ é múltiplo de 4.

14. Mostre que se $m \geq n$ então G contém um ciclo.

    Resolução: Princípio da casa de Pombos, onde as casas são os vértices e os pombos as arestas.

15. Quantos grafos simples existem com n vértices?

    Resolução: $2^{\binom{n}{2}}$, pelo princípio multiplicativo em relação a quantas arestas são possíveis em um grafo.

16. Determine quais grafos bipartidos completos são grafos completos.

    Resolução: $K_{1,1}$. Como um grafo bipartido $K_{p,q}$ para $p > 1$ e $q > 1$ obrigatoriamente não há arestas entre vértices de uma mesma parte, logo $K_{1,1}$ é o único grafo bipartido completo que é um grafo completo.

17. Mostre que o complemento de um grafo desconexo é conexo.

    Resolução: Consideremos G desconexo, temos dois casos: Se dois vértices estão em duas componentes conexas distintas em G, no grafo complementar estes vértices serão vizinhos, portanto estarão na mesma componente conexa; Se dois vértices (u e v) estão na mesma componente conexa em G, no grafo complementar existe um caminho de u para w, tal que w está em componente conexa distinta de u e v em G, e de w para v, portanto há caminho entre u e v em $\overline{G}$.

18. Mostre que para qualquer grafo G, se $\delta \geq 2$ então G possui um ciclo.

    Resolução: Tome um caminho maximal em G, seja u o primeiro vértice deste caminho. Como o caminho é maximal e $d(u) \geq 2$, há mais uma aresta incidente a u que não está no caminho, logo esta aresta é incidente a algum outro vértice do caminho, formando assim um ciclo.

19. Mostre que qualquer grafo com pelo menos 6 vértices possui três vértices vizinhos entre si ou três vértices não vizinhos entre si.

    Resolução: Uma forma de provar é analisar todos os grafos com 6 vértices e verificar que em cada um deles há uma clique de tamanho 3 ou um conjunto independente de tamanho 3.

20. Se G é um grafo contendo exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe necessariamente um caminho ligando estes dois vértices em G.

    Resolução: Como consequência do Teorema do Aperto de Mãos, há sempre um número par de vértices de grau ímpar. Como G possui dois vértices de grau ímpar, se cada um estive numa componente conexa distinta então em cada componente haveria um único vértice de grau ímpar. Como uma componente conexa é isomorfo a um grafo, então esse seria um grafo com número ímpar de vértices de grau ímpar, contradição.