Aula 9 - Grafos Hamiltonianos

Luís Felipe

UFF

28 de Setembro de 2022

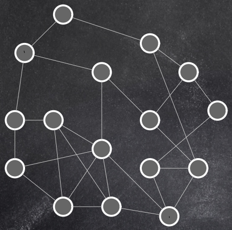
Luís Felipe

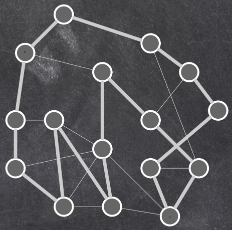
28/09/22

Grafos Hamiltonianos

- Um ciclo de Hamilton é um ciclo gerador para o grafo. Ou seja, é um ciclo que contém todos os vértices do grafo.

- Um grafo que admite um ciclo de Hamilton é dito Hamiltoniano.





Luís Felipe
28/09/22

Grafos Hamiltonianos

- Até hoje, não existe um teorema correspondente ao de Euler que caracterize grafos Hamiltonianos.

- Descreveremos, portanto, condições necessárias e condições suficientes para tais grafos.

Luís Felipe
28/09/22

Se G é Hamiltoniano, então...

Condições Necessárias - úteis para resposta NÃO!!

- Todo grafo Hamiltoniano é conexo.
  - Prova: Através do ciclo Hamiltoniano temos caminho entre quaisquer dois vértices.

Luís Felipe
28/09/22

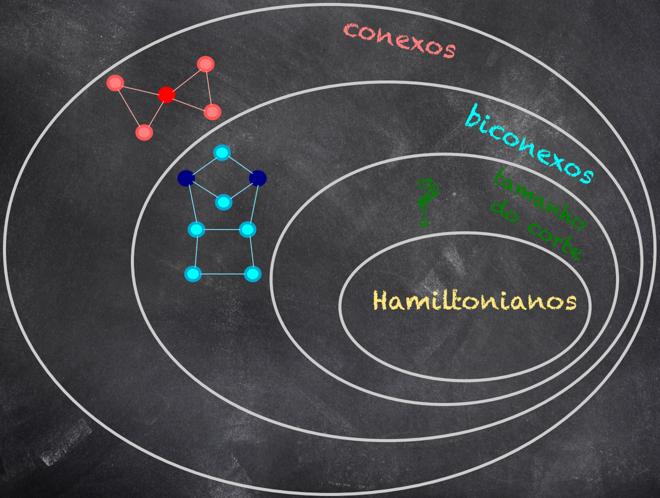
Se G é Hamiltoniano, então...

- Todo grafo Hamiltoniano é biconexo.
  - Prova: Considere G hamiltoniano e seja C um ciclo hamiltoniano de G. Como a remoção de qualquer vértice de C não desconecta C, assim, também não desconecta G. Ou seja, G não possui articulações.
- Se G é Hamiltoniano e S é qualquer subconjunto próprio não vazio de vértices, então $G \setminus S$ tem no máximo $|S|$ componentes conexas.
  - Sejam C um ciclo hamiltoniano e S um subconjunto próprio de vértices de G. Então o número de componentes conexas em $C \setminus S$ é no máximo $|S|$. Pois, $C \setminus S$ é a união de S caminhos disjuntos.
    Como $G \setminus S$ e $C \setminus S$ têm o mesmo conjunto de vértices, e $G \setminus S$ tem, possivelmente, mais arestas que $C \setminus S$, então $G \setminus S$ tem, no máximo, $|S|$ componentes conexas.

Luís Felipe

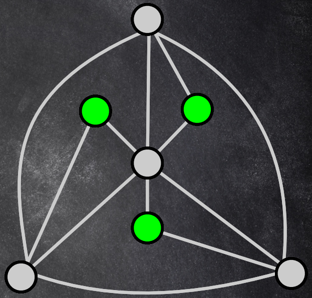
28/09/22

Se G é Hamiltoniano, então...



Luís Felipe
28/09/22

Se G é Hamiltoniano, então...



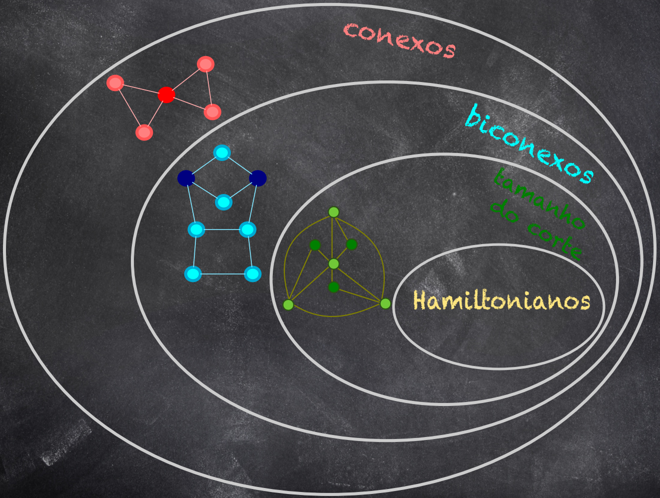
Verifiquem que $w(G \setminus S) \leq |S|$,
para todo subconjunto próprio
S de $V(G)$.

Vamos mostrar que o grafo
G não é Hamiltoniano.

Note que temos 3 vértices (verdes)
de grau 2. Portanto, todas as arestas
incidentes a eles devem participar do
ciclo Hamiltoniano.
Neste caso, o vértice central terá grau 3 ciclo.
Absurdo.

Luís Felipe
28/09/22

Se G é Hamiltoniano, então...



Luís Felipe
28/09/22

Condições Suficientes

Condições suficientes são importantes para respostas SIM.

Uma primeira observação é que se G for K_n, $n \geq 3$ então G é hamiltoniano.

Com essa simples observação, podemos nos indagar se é verdade quanto mais arestas o grafo tiver, então maior é a chance dele ser hamiltoniano.

Pergunta: Quantas arestas garantem a existência de um ciclo hamiltoniano? Ou ainda, para qual grau dos vértices temos que um grafo é hamiltoniano?

Luís Felipe
28/09/22

Teorema de Dirac

Teorema: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova: Suponha que G satisfaça $n \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ e G não seja hamiltoniano. Considere $P = v_1, v_2, \ldots, v_k$ um maior caminho em G. Note que cada $v \in N(v_1) \cup N(v_k)$ pertence a P, caso contrário, teríamos um caminho maior que P, iniciando por algum $(N(v_1) \cup N(v_k)) \setminus P$. Chame $u = v_1$ e $v = v_k$

- Caso 1) u e v são vizinhos: Neste caso, já temos um ciclo.
- Caso 2) u e v não são vizinhos: Queremos encontrar um índice j tal que uv_{j+1}, vv_j sejam arestas de G:

Vamos mostrar que esse par de arestas existe. Definimos:

$$S = \{i \; | uv_{i+1} \in E\} \qquad \text{corresponde a } N(u)$$
$$T = \{i \; | vv_i \in E\} \qquad \text{corresponde a } N(v)$$

$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T| \therefore |S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n$.

Observe que $n \notin S \cup T$, logo $|S \cup T| < n$, e assim $|S \cap T| \geq 1$.

Luís Felipe
28/09/22

Assim, existe j tal que $v_j v_k \in E$ e $v_{j+1} v_1 \in E$. Portanto o ciclo de G é $C = v_1 v_{j+1} \dots v_{k-1} v_k v_j \dots v_4 v_3 v_2 v_1$.

Vamos mostrar que este ciclo é Hamiltoniano, ou seja, contém todos os vértices de G.

Suponha que C não contenha todos os vértices. Como G é conexo, então tome um vértice w que não esteja em C e seja vizinho a algum vértice de C, seja então a aresta wv_ℓ, tal que $v_\ell \in C$.

Assuma, sem perda de generalidade, que $1 < \ell \leq j$. Assim, note que há um caminho em G maior do que P pelo caminho: $wv_\ell v_{\ell-1} \cdots v_1 v_{j+1} v_{j+2} \cdots v_k v_j v_{j-1} \cdots v_{\ell+1}$. Contradição, por termos assumido P um maior caminho em G.