Aula 8: Blocos e grafos Eulerianos

Luís Felipe

UFF

23 de Setembro de 2022

Luís Felipe

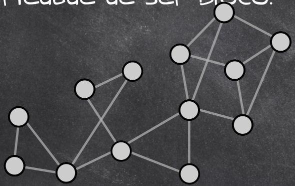
23/09/22

Blocos

Um **bloco** é um grafo conexo que não possui articulação.

Um **bloco de um grafo G** é um subgrafo de G maximal com relação à propriedade de ser bloco.

Exemplo:



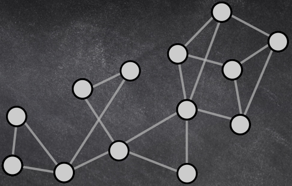
4 blocos

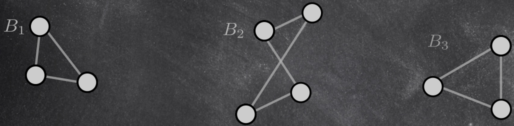
- Fato: Dois blocos diferentes em um grafo têm no máximo um vértice em comum.
- Fato: Cada aresta de um grafo G está em um único bloco. Portanto, os blocos formam uma partição de $E(G)$.

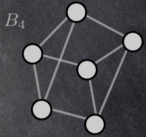
Luís Felipe

23/09/22

Exemplo







- B_2 possui dois vértices que o desconectam.
- B_1 e B_3 são K_3's, portanto, 2-conexos.
- B_4 não possui dois vértices que o desconectam.
- B_1, B_2, B_3 e B_4 são 2-conexos. Logo, também são 1-conexos.
- De modo geral, todo grafo k-conexo também é $(k-i)$-conexo, $i = 1, \ldots, k-1$.

Luís Felipe
23/09/22

Como caracterizar grafos k-conexos?

- Vimos os conceitos de: articulação; corte de vértices; grafos k-conexos; grafos k-aresta conexos; relacionamos κ, κ' e δ; vimos blocos.

- Sabemos caracterizar os grafos 1-conexos. Como?
    - G é 1-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existe pelo menos 1 caminho entre eles.

- E sobre os grafos 2-conexos? Conseguimos alguma caracterização?Sim!!!!
    - G é 2-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existem pelo menos 2 caminhos sem vértices em comum, exceto os próprios u e v. (Whitney)

- E sobre os grafos k-conexos?
    - G é k-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existem pelo menos k caminhos sem vértices em comum, exceto os próprios u e v. (Menger)

Luís Felipe

23/09/22

Teorema de Whitney

Teorema: G é 2-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existem pelo menos 2 caminhos sem vértices em comum, exceto os próprios u e v.

Prova: ($\leftarrow$) Se temos dois caminhos disjuntos então qualquer par de vértice u e v, a remoção de 1 vértice não deixa nenhum vértice desconectado, então G é 2-conexo.

Luís Felipe
23/09/22

Continuação da demonstração

($\rightarrow$) Seja G 2-conexo. Vamos mostrar por indução na distância $d(u, v)$ entre vértices u e v, que quaisquer dois vértice u e v são conectados por pelo menos dois caminhos disjuntos.

Base: Suponha $d(u, v) = 1$. Como G é 2-conexo, a aresta uv não é uma ponte, logo, uv está contida num ciclo.

HI: Assuma que o teorema vale para quaisquer dois vértices com distância menor que k.

Luís Felipe
23/09/22

Conclusão da demonstração

Passo: Suponha $d(u, v) = k$ e $k \geq 2$. Considere um caminho entre u e v de tamanho k e seja w o vértice que precede v neste caminho.
Como $d(u, w) = k - 1$, segue da HI que existem dois caminhos internos disjuntos entre u e w em G. Sejam P e Q estes caminhos entre u e w.
Como G é 2-conexo, $G - w$ é conexo, e assim ainda contém um caminho entre u e v, seja P' este caminho. Seja x o último vértice de P' que também pertence a $P \cup Q$. Como $u \in P \cup Q$, existe este vértice x, que pode eventualmente ser igual a v.
Assuma, sem perda de generalidade, que $x \in P$. Assim, G possui dois caminhos internos disjuntos entre u e v. Sendo: um composto pelos vértices de P de u até x juntamente pelos vértices de P' de x até v; outro composto por Q e a aresta wv.

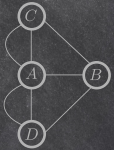
Luís Felipe

23/09/22

Grafos Eulerianos

Um circuito de Euler é um passeio fechado que visita cada aresta do grafo exatamente uma vez.

Lembram do Problema das 7 pontes de Konigsberg?



Existe circuito de Euler no grafo associado a este mapa?
Não!

Luís Felipe
23/09/22

Grafos Eulerianos - Caracterização

Teorema: Um grafo conexo não trivial é Euleriano se, e somente se, o grau de cada um dos vértices é par.

Prova: ($\rightarrow$) Suponha G um grafo Euleriano conexo e não trivial (diferente de K_1).
Seja C um passeio de Euler com início e fim no vértice u.
Cada vez que um vértice v aparece no passeio de C, duas arestas incidentes a v são contadas (uma vindo para v e outra saindo de v.
Como um passeio de Euleriano passa cada aresta exatamente uma vez, então para todo $v \neq u$, $d(v)$ é par.
Similarmente, $d(u)$ é par, pois C começa e termina em u.
Outra forma de verificar que $d(u)$ é par: Há número par de vértices de grau ímpar (Aula 2) e todo vértice $v \neq u$ possui grau par, então u só pode possuir grau par.

Luís Felipe
23/09/22

Grafos Eulerianos - Continuação da prova

($\leftarrow$) Suponha G é conexo não trivial onde todo vértice tem grau par. Vamos construir um passeio de Euler em duas etapas:

Epata 1: Decompor as arestas de G em ciclos;

Etapa 2: Compor o passeio de Euler a partir dos ciclos da Etapa 1.

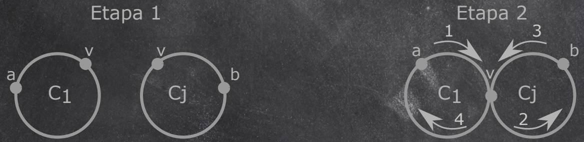
Na Etapa 1, começamos por identificar um ciclo C_1 no grafo (não necessariamente gerador). Este ciclo C_1 existe porque todos os vértices possuem grau par. Podemos então repetir a operação em relação a uma componente conexa não trivial deste grafo. Obtemos assim a decomposição.

Luís Felipe
23/09/22

Grafos Eulerianos - Conclusão da prova

Etapa 2: Compor o passeio de Euler a partir dos ciclos da Etapa 1.

Na Etapa 2, começando com o ciclo C_1, compomos C_1 com um ciclo C_j que tenha vértice em comum com C_1. O ciclo C_j existe, porque o grafo é conexo.
A composição é realizada enquanto houver ciclos da Etapa 1 não presente nesta etapa.



Tomando, portanto, vértice a e v em C_1, tal que v também pertença a C_j, que por sua vez possua um outro vértice b.
Percorramos entre C_1 e C_j tal como na figura acima. Note que este é um passeio de Euler associado a C_1 e C_j.
Após isto, caso exista outro ciclo C_k, façamos o mesmo procedimento compondo C_k ao $C_1 C_j$.