Aula 7: Conectividade (parte II)

Luís Felipe

UFF

21 de Setembro de 2022

Luís Felipe
21/09/22

Vamos falar de conectividade?

- Vamos avaliar a conectividade de um grafo.
  - Como?

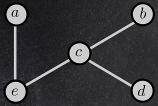
    Definindo parâmetros de conectividade
    e relacionando-os
- Vamos conhecer a classe dos grafos blocos.

Luís Felipe
21/09/22

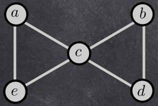
Quão conectado eu sou??

Pergunta:

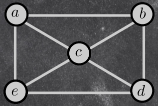
- Quantas arestas precisamos remover para desconectar um grafo?



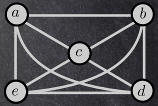
1 aresta



2 arestas



3 arestas



4 arestas

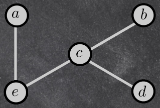
Quanto mais arestas mais complicado é para desconectar?

Luís Felipe
21/09/22

E quanto aos vértices?

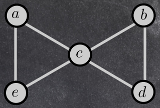
- Quantos vértices precisamos remover para desconectar um grafo?

- Para árvores ($n \geq 3$)?

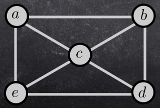


  - Sempre conseguimos com 1. Por que?

- E para um grafo qualquer?



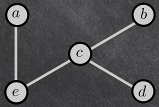
- Neste exemplo, conseguimos com 1. Será que sempre?!
- Claramente, Não!!!!!



Luís Felipe
21/09/22

Articulação

Um vértice v é de articulação se, e somente se, $w(G \setminus v) > w(G)$.



- Os vértices c e e são de articulação.
- Os vértices a, b e d não são de articulação.

Luís Felipe

21/09/22

Articulações em árvores

Teorema. Um vértice v de uma árvore é uma articulação se, e somente se, $d(v) > 1$.

Ideia da prova: Se $d(v) = 0$, G é o grafo trivial.

Se $d(v) = 1$, o grafo $G - v$ não tem ciclos e tem $m(G - v) = m(G) - 1$ e $n(G - v) = n(G) - 1$. Logo, $G - v$ é uma árvore.

Por outro lado, se $d(v) > 1$, então sejam u, z adjacentes a v. Como u, v, z é o único caminho entre u e z, $w(G - v) > w(G)$ e v é uma articulação.

Corolário. Num grafo não trivial conexo sempre existem pelo menos dois vértices que não são articulações.

Ideia da prova: Como todo grafo conexo possui uma árvore geradora (aula 5), e qualquer árvore possui pelo menos duas folhas, pelo teorema anterior, folhas não são articulações árvores.

Luís Felipe
21/09/22

O que fazer se não sou articulado??

Observe que articulação está para vértices assim como ponte está para arestas.

Pergunta: Neste contexto, que conjunto seria correspondente a um corte de arestas, sob a perspectiva de remoção de vértices??

Luís Felipe
21/09/22

Corte de vértices

Um corte de vértices é um conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $w(G \setminus S) > w(G)$ ou $G \setminus S \approx K_1$.

Reflexão: Como tratar um corte?? Maximizar ou Minimizar??

OBS.: Se v é uma articulação de G, então v é um corte (e de tamanho mínimo).

Luís Felipe
21/09/22

Conectividade de um grafo conexo G

O parâmetro $\kappa(G)$ denota o tamanho do menor corte de vértices de G.

- Se $G = K_n$, então $\kappa(G) = n - 1$

O parâmetro $\kappa'(G)$ denota o tamanho do menor corte de arestas de G.

- Se $G = K_1$, então $\kappa'(G) = 0$

Um grafo é k-conexo, se $\kappa(G) \geq k$.

- Se G é k-conexo, então com menos de k vértices não desconectamos G. OBS.: Note também que não sabemos se com k vértices desconectamos G.

Um grafo é k-aresta conexo, se $\kappa'(G) \geq k$.

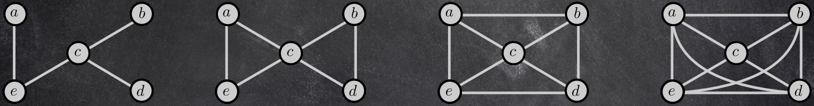
- Se G é k-aresta conexo, então com menos de k arestas não desconectamos G. OBS.: Note também que não sabemos se com k arestas desconectamos G.

Luís Felipe
21/09/22

Quão conectado eu sou?? (mais uma vez)

Perguntas:

- Quantas arestas precisamos remover para desconectar um grafo? ou seja, quanto vale $\kappa'(G)$?
- Quantos vértices precisamos remover para desconectar um grafo? ou seja, quanto vale $\kappa(G)$?



$\kappa'(G) = 1$
$\kappa(G) = 1$

$\kappa'(G) = 2$
$\kappa(G) = 1$

$\kappa'(G) = 3$
$\kappa(G) = 3$

$\kappa'(G) = 4$
$\kappa(G) = 4$

Luís Felipe
21/09/22

Conectividade de um grafo conexo G

Teorema. $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$

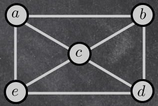
Ideia da prova: Seja v um vértice de grau mínimo em G. As arestas incidentes a v definem um corte de arestas pra G. Daí, $\kappa' \leq \delta$.
Resta mostrar que $\kappa \leq \kappa'$.
Vimos que $\kappa \leq n(G) - 1$. Considere o menor corte de arestas de G, $[S, \overline{S}]$.

- Se todo vértice de S é adjacente a todo vértice de $\overline{S}$, então $|[S, \overline{S}]| = |S||\overline{S}| \geq n(G) - 1 \geq \kappa$.
- Senão, sejam $x \in S$ e $y \in \overline{S}$ tal que $xy \notin E(G)$.
  Considere $T = N_{\overline{S}}(x) \cup \{v \in S | v \neq x, N_{\overline{S}}(v) \neq \emptyset\}$.
  Observe que todo caminho de x para y passa por T. Logo T é um corte de vértices.
  Note que, tomando as arestas de x para os vértices de $T \cap \overline{S}$ e uma aresta dos vértices de $T \cap S$ para cada vértice de $\overline{S}$, temos $|T|$ arestas distintas que pertencem a $[S, \overline{S}]$.
  Daí, $\kappa' = |[S, \overline{S}]| \geq |T| \geq \kappa$

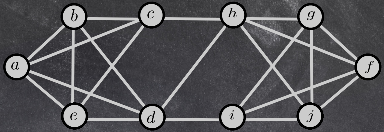
Luís Felipe
21/09/22

Exemplos

- Grafo em que $\kappa = \kappa' = \delta$.



- Grafo em que $\kappa < \kappa' < \delta$.



Luís Felipe

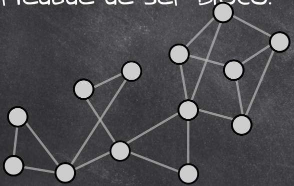
21/09/22

Blocos

Um **bloco** é um grafo conexo que não possui articulação.

Um **bloco de um grafo G** é um subgrafo de G maximal com relação à propriedade de ser bloco.

Exemplo:



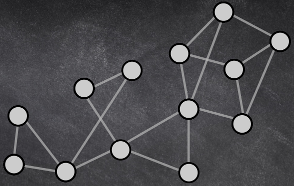
4 blocos

- **Fato:** Dois blocos diferentes em um grafo têm no máximo um vértice em comum.
- **Fato:** Cada aresta de um grafo G está em um único bloco. Portanto, os blocos formam uma partição de $E(G)$.

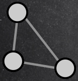
Luís Felipe

21/09/22

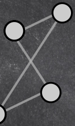
Exemplo



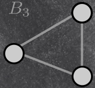
B_1



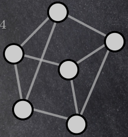
B_2



B_3



B_4



- B_2 possui dois vértices que o desconectam.
- B_1 e B_3 são K_3's, portanto, 2-conexos.
- B_4 não possui dois vértices que o desconectam.
- B_1, B_2, B_3 e B_4 são 2-conexos. Logo, também são 1-conexos.
- De modo geral, todo grafo k-conexo também é $(k-i)$-conexo, $i = 1, \ldots, k-1$.

Luís Felipe
21/09/22

Como caracterizar grafos k-conexos?

- Vimos na aula de hoje os conceitos de: articulação; corte de vértices; grafos k-conexos; grafos k-aresta conexos; relacionamos κ, κ' e δ; vimos blocos.
- Sabemos caracterizar os grafos 1-conexos. Como?
  - G é 1-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existe pelo menos 1 caminho entre eles.
- E sobre os grafos 2-conexos? Conseguimos alguma caracterização?Sim!!!!
  - G é 2-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existem pelo menos 2 caminhos sem vértices em comum, exceto os próprios u e v. (Whitney)
- E sobre os grafos k-conexos?
  - G é k-conexo se, e somente se, para qualquer par de vértices u e v existem pelo menos k caminhos sem vértices em comum, exceto os próprios u e v. (Menger)
- Veremos este assunto na próxima aula!!!!