Aula 6 - Conectividade

Luís Felipe

UFF

16 de Setembro de 2022

Luís Felipe
16/09/22

Cortes de arestas

Corte de arestas

Luís Felipe

16/09/22

Cortes de arestas

Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Luís Felipe

16/09/22

Cortes de arestas

Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Um corte de arestas de um grafo G é um conjunto E da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é subconjunto próprio e não vazio de V e $\overline{S} = V \setminus S$.

Luís Felipe
16/09/22

Cortes de arestas

Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Um corte de arestas de um grafo G é um conjunto E da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é subconjunto próprio e não vazio de V e $\overline{S} = V \setminus S$.

Exemplo:

Luís Felipe
16/09/22

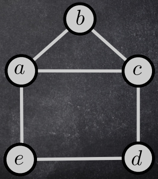
Cortes de arestas

Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Um corte de arestas de um grafo G é um conjunto E da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é subconjunto próprio e não vazio de V e $\overline{S} = V \setminus S$.

Exemplo:



Luís Felipe

16/09/22

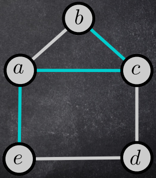
Cortes de arestas

Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Um corte de arestas de um grafo G é um conjunto E da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é subconjunto próprio e não vazio de V e $\overline{S} = V \setminus S$.

Exemplo:



Luís Felipe
16/09/22

Cortes de arestas

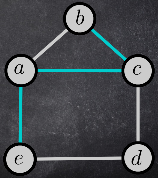
Corte de arestas

Denotamos por $[S, S']$ o conjunto das arestas com um extremo em S e outro extremo em S'.

Um corte de arestas de um grafo G é um conjunto E da forma $[S, \overline{S}]$, onde S é subconjunto próprio e não vazio de V e $\overline{S} = V \setminus S$.

Exemplo:

$[S, \overline{S}] = \{bc, ac, ae\}$ é corte de arestas.



Luís Felipe
16/09/22

Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

Luís Felipe
16/09/22

Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Luís Felipe

16/09/22

Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Luís Felipe
16/09/22

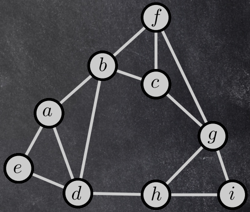
Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Exemplo:



Luís Felipe
16/09/22

Cortes e ligações

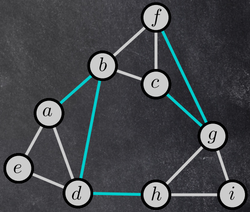
Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Exemplo:

$\{ab, bd, dh, cg, fg\}$ não é corte de arestas



Luís Felipe
16/09/22

Cortes e ligações

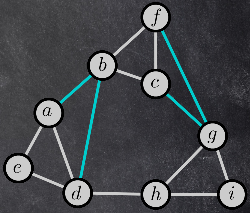
Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Exemplo:

$\{ab, bd, dh, cg, fg\}$ não é corte de arestas
$\{ab, bd, cg, fg\}$ é corte de arestas.



Luís Felipe

16/09/22

Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

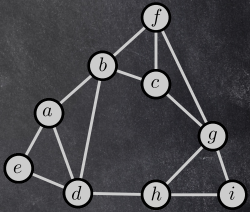
Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Exemplo:

$\{ab, bd, dh, cg, fg\}$ não é corte de arestas

$\{ab, bd, cg, fg\}$ é corte de arestas.

$S = \{b, c, f\}$ define um corte de arestas.



Luís Felipe
16/09/22

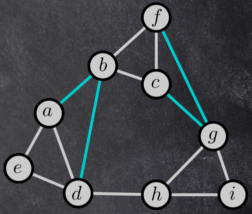
Cortes e ligações

Uma ligação é um corte de arestas minimal não vazio.

OBS.: Cada aresta que é uma ponte é uma ligação.

Se G é conexo, então uma ligação de G é um subconjunto minimal B de E tal que $G - B$ é um grafo desconexo.

Exemplo:



$\{ab, bd, dh, cg, fg\}$ não é corte de arestas

$\{ab, bd, cg, fg\}$ é corte de arestas.

$S = \{b, c, f\}$ define um corte de arestas.

$\{ab, bd, cg, fg\}$ é uma ligação.

Luís Felipe
16/09/22

Coárvore

Se H é subgrafo de G, o complemento de H em G, denotado por $\overline{H}(G)$, é o subgrafo $G - E(H)$.

Luís Felipe
16/09/22

Coárvore

Se H é subgrafo de G, o complemento de H em G, denotado por $\overline{H}(G)$, é o subgrafo $G - E(H)$.

Se G é conexo e T uma árvore geradora de G, o subgrafo $\overline{T}$ é chamado de coárvore.

Luís Felipe
16/09/22

Coárvore

Se H é subgrafo de G, o complemento de H em G, denotado por $\overline{H}(G)$, é o subgrafo $G - E(H)$.

Se G é conexo e T uma árvore geradora de G, o subgrafo $\overline{T}$ é chamado de coárvore.

Teorema. Sejam T uma árvore geradora de um grafo conexo G e e uma aresta de T. Temos que:

i) A coárvore $\overline{T}$ não contém ligação de G;

ii) $\overline{T} + e$ contém exatamente uma ligação de G.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G. Pois qualquer aresta do conjunto B é uma aresta entre S e $\overline{S}$, e tanto $G[S]$ quanto $G[\overline{S}]$ são conexos, pois G é conexo.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G. Pois qualquer aresta do conjunto B é uma aresta entre S e $\overline{S}$, e tanto $G[S]$ quanto $G[\overline{S}]$ são conexos, pois G é conexo. Dessa forma, B está contido em $\overline{T} + e$.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G. Pois qualquer aresta do conjunto B é uma aresta entre S e $\overline{S}$, e tanto $G[S]$ quanto $G[\overline{S}]$ são conexos, pois G é conexo. Dessa forma, B está contido em $\overline{T} + e$. Isso implica que para cada aresta $b \in B$, $T - e + b$ é uma árvore geradora de G.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G. Pois qualquer aresta do conjunto B é uma aresta entre S e $\overline{S}$, e tanto $G[S]$ quanto $G[\overline{S}]$ são conexos, pois G é conexo. Dessa forma, B está contido em $\overline{T} + e$. Isso implica que para cada aresta $b \in B$, $T - e + b$ é uma árvore geradora de G.

Logo, cada ligação de G contida em $\overline{T} + e$ inclui toda aresta $b \in B$.

Luís Felipe
16/09/22

Demonstração

Prova:

i) Suponha B uma ligação de G. Logo, $G - B$ não é conexo e, portanto $G - B$ não contém árvore geradora.

Então, como B é o complemento de $G - B$ e $G - B$ não é uma árvore geradora, então B não está contido em $\overline{T}$.

ii) Seja S o conjunto de vértices de uma das duas componentes conexas de $T - e$.

O corte de arestas $B = [S, \overline{S}]$ em G é minimal, e portanto, uma ligação de G. Pois qualquer aresta do conjunto B é uma aresta entre S e $\overline{S}$, e tanto $G[S]$ quanto $G[\overline{S}]$ são conexos, pois G é conexo. Dessa forma, B está contido em $\overline{T} + e$. Isso implica que para cada aresta $b \in B$, $T - e + b$ é uma árvore geradora de G.

Logo, cada ligação de G contida em $\overline{T} + e$ inclui toda aresta $b \in B$. Assim, B é a única ligação contida em $\overline{T} + e$.