Aula 5 - Árvores (parte II)

Luís Felipe

UFF

14 de Setembro de 2022

Luís Felipe

14/09/22

Árvores

Teorema 5. Se G uma árvore então $m = n - 1$.

Prova: (Demonstração por indução forte sobre n).

- Base: $n = 1$. $G \approx K_1$. Portanto, $m = 0 = n - 1$.
- H.I.: Suponha que o teorema seja verdadeiro para todas as árvores com menos que n vértices.
- Passo: Seja G uma árvore com n vértice, $n \geq 2$. Tome $uv \in E$. Como G é uma árvore, então $G \setminus \{uv\}$ é um grafo sem caminho entre u e v, dado que numa árvore há um único caminho entre qualquer par de vértices. Dessa forma, $G \setminus \{uv\}$ possui duas componentes conexas e cada componente conexo possui menos que n vértices, e assim, cada componente conexa é uma árvore e satisfaz a HI. Considere G_1 e G_2 as duas componentes conexas de $G \setminus \{uv\}$. Por HI, $m(G_1) = n(G_1) - 1$ e $m(G_2) = n(G_2) - 1$. Com isso:
  $m(G) = m(G_1) + m(G_2) + 1 = n(G_1) - 1 + n(G_2) - 1 + 1 = n(G) - 1$

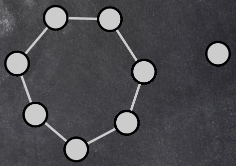
Luís Felipe
14/09/22

Necessário, mas suficiente?

Esta condição também é suficiente? NÃO!!

Existe um grafo com $m = n - 1$ que não seja árvore?

SIM!!



Luís Felipe
14/09/22

Árvores

Teorema 6. Seja G um grafo. Então duas propriedades garantem a terceira:

- $m = n - 1$
- G é conexo
- G é acíclico
- Prova:
  Já mostramos que se G é conexo e acíclico, então $m = n - 1$.
  Resta:
  - Mostrar que se G é acíclico e $m = n - 1$, então G é conexo. (Prova por absurdo)
  - Mostrar que se G é conexo e $m = n - 1$, então G é acíclico. (Prova por absurdo)

Luís Felipe
14/09/22

G acíclico e $m = n - 1$

Se G é acíclico e $m = n - 1$, então G é conexo.

Prova: Suponha que G seja acíclico com $n - 1$ arestas e G seja desconexo, com w componentes conexas.
Cada componente conexa também é acíclica e, dessa forma, cada componente conexa é uma árvore. Ou seja:
$m = \sum_{i=1}^{w}(n_i - 1) = n - w$. Por outro lado, $m = n - 1$, assim:
$m = n - w = n - 1$. Assim $w = 1$. Contradição por termos assumido G desconexo.

Luís Felipe

14/09/22

G conexo e $m = n - 1$

Se G é conexo e $m = n - 1$, então G é acíclico.

Prova: Suponha que G seja conexo com $n - 1$ arestas e G possua um ciclo C.

Considere um par de vértices vizinhos u e v que pertençam a C. Dessa forma, há dois caminhos entre este par em C, a saber, pela aresta uv e pelo caminho que percorre os demais vértices de C. Seja P este caminho de u até v que não passa pela aresta uv.

Removemos, agora, a aresta uv de G. Temos que $G \setminus \{uv\}$ é conexo, pois a remoção de uv continuou mantendo caminhos entre u e v por P. Como $G \setminus \{uv\}$ é conexo e acíclico, temos que $G \setminus \{uv\}$ é uma árvore. Contradição pelo fato de $G \setminus \{uv\}$ possuir $n - 2$ arestas.

Luís Felipe
14/09/22

Árvores

Corolário 3. Em uma árvore sempre há pelo menos duas folhas.
Prova: Pelo Teorema do Aperto de Mãos: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Como G é uma árvore, $m = n - 1$ (Teorema 5). Daí,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1) = 2n - 2.$$

- Suponha G sem folhas. Portanto, $d(v) \geq 2, \forall v \in V$. Daí,

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 2n$$

  Absurdo. Logo, dois vértices possuem graus iguais a 1 para que a soma seja $2n-2$. Pois, se um vértice tivesse grau igual a 0, o grafo seria desconexo. Se somente um vértice tivesse grau igual a 1, a soma dos graus seria pelo menos $2n-1$.

Luís Felipe

14/09/22

Árvores

Corolário 4. Se T é uma árvore com f folhas, então $f \geq \Delta$.

- Prova:

  Sejam $u \in V$ tal que $d(u) = \Delta$ e F o conjunto das f folhas de T. Daí,

$$\sum_{v \in V} d(v) = f + \Delta + \sum_{v \in V \setminus (F \cup \{u\})} d(v).$$

Como $d(v) \geq 2, \forall v \in V \setminus (F \cup \{u\})$ temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = f + \Delta + \sum_{v \in V \setminus (F \cup \{u\})} d(v) \geq f + \Delta + 2(n - f - 1) = -f + \Delta + 2n - 2$$

Luís Felipe
14/09/22

Continuação

Ou seja:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq -f + \Delta + 2n - 2$$

Mas, vimos que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2(n-1) = 2n - 2.$$

Assim,

$$2n - 2 \geq -f + \Delta + 2n - 2$$

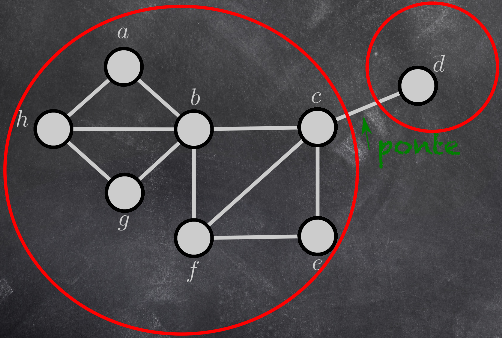
Portanto, $f \geq \Delta$.

Luís Felipe
14/09/22

Pontes

Uma ponte em um grafo G é uma aresta que satisfaz: $w(G) < w(G - e)$.

Exemplo:



Luís Felipe
14/09/22

Árvores e Pontes

Teorema 7. Uma aresta e é uma ponte se, e somente se, e não pertence a um ciclo.

Prova:

$(\Rightarrow)$

Suponha que $e = xy$ seja uma ponte em G. Logo, por definição, $w(G) < w(G - e)$. Como e é uma ponte, então ao ser removida, temos que x e y pertencem a componentes conexas distintas de $w(G - e)$. Caso a aresta e pertença a um ciclo C de G, então após a remoção de e, ainda haveria um caminho entre x e y. Portanto, e não seria uma ponte.

$(\Leftarrow)$

Assuma que e não pertença a um ciclo e que e não seja uma ponte, logo $w(G) = w(G - e)$. A igualdade diz que ainda existe um caminho entre x e y não passando por e em $G - e$. Configurando, portanto, mais do que um caminho em G entre x e y, e assim, e pertence a um ciclo. Contradição pela hipótese de que e não pertence a um ciclo.

Luís Felipe
14/09/22

Árvores e Pontes

Teorema 8. Um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, toda aresta é ponte.

Prova:

($\Rightarrow$)

Seja G uma árvore e e uma aresta de G. Como G é acíclico, então e não pertence a nenhum ciclo de G, e portanto, pelo Teorema 7, e é uma ponte de G.

($\Leftarrow$)

Suponha que G seja conexo e não seja uma árvore, logo G possui um ciclo C. Assim, pelo Teorema 7, nenhuma aresta de C é uma ponte.

Luís Felipe
14/09/22

Árvores e Pontes

Teorema 9. Todo grafo conexo admite uma árvore geradora, i.e., um subgrafo gerador (subgrafo gerador é um subgrafo que possui todos os vértices do grafo) que é uma árvore.

- Prova:
  Seja G um grafo conexo. Considere o subgrafo gerador H de G que seja minimalmente conexo, i.e., para toda aresta $e \in H$, $H - e$ é desconexo. Cada aresta e de H é ponte e, pelo Teorema 7, temos que e não está em ciclo. Logo, H além de ser subgrafo gerador e conexo é também acíclico.
  Portanto, H é árvore (geradora de G).

Luís Felipe
14/09/22

Árvores e Pontes

Corolário 10. Se G um grafo conexo, então $m \geq n - 1$.

Prova:
Como G é conexo, então, pelo Teorema 9, G possui uma árvore geradora T. Assim, $m(G) \geq m(T) = n(T) - 1 = n(G) - 1$.

Luís Felipe
14/09/22

Árvores e Pontes

Teorema 11. Seja T uma árvore geradora para um grafo G e seja e uma aresta que pertence a G, mas não a T. Então, o grafo $T + e$ possui exatamente um ciclo.

Prova:
Considere $e = xy$ uma aresta de G que não pertence a T. Como T é minimamente conexo, então existe um único caminho $x, v_1, v_2, \ldots, v_k y$ entre x e y em T. Logo, com a adição de e, $T + e$ possui um único ciclo C, a saber,
$C = x, v_1, v_2, \ldots, v_k yx$.

Note que C é um ciclo, e além disso, não há outro ciclo em $T + e$, pois caso houvesse mais ciclos, haveria mais de um caminho entre x e y em T.