Aula 4 - Grafos Bipartidos e Árvores (Parte 1)

Luís Felipe

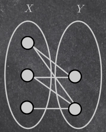
UFF

09 de Setembro de 2022

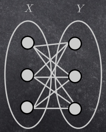
Luís Felipe
09/09/22

Grafos Bipartidos

- Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se V admite partição em dois subconjuntos X e Y tais que toda aresta em E possui um extremo em X e o outro extremo em Y. Essa partição de $V(G)$ é chamada de bipartição de V.



- Um grafo é bipartido completo, denotado por $K_{p,q}$, é um grafo bipartido (X, Y, E) com $|X| = p, |Y| = q$ e $|E| = p \times q$. Ou seja, $K_{p,q}$ tem todas as arestas possíveis com um extremo em X e o outro em Y.



Luís Felipe
09/09/22

Grafos Bipartidos

Teorema 2: Um grafo bipartido k-regular, com $k > 0$ e com bipartição de V em X e Y, satisfaz $|X| = |Y|$.

- Prova: Num grafo bipartido,

$$m = \sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$

Como G é k-regular,

$$\sum_{v \in X} d(v) = k|X|$$

e

$$\sum_{v \in Y} d(v) = k|Y|.$$

Logo, $k|X| = k|Y|$ e, como $k > 0$, $|X| = |Y|$.

Luís Felipe
09/09/22

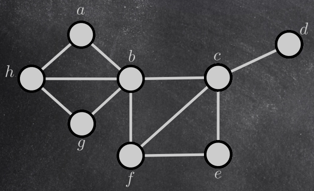
Passeio, trilha e caminho

- Passeio: uma sequência $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices de V com $v_i v_{i+1} \in E$, onde $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
    - Comprimento do passeio = número de arestas.
- Trilha: um passeio onde as arestas são distintas.
- Caminho: um passeio onde os vértices são distintos.
- Ciclo: é um passeio fechado $v_1, v_2, \ldots, v_k = v_1$, onde $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ é um caminho.
    - Comprimento do ciclo = número de arestas = número de vértices
    - Se o ciclo tem comprimento par, é dito ciclo par.
    - Caso contrário, é dito ciclo ímpar.
    - A cintura é o comprimento do menor ciclo de G.

Luís Felipe

09/09/22

Exemplo 7:



a, b, c, d, c, e é um passeio

a, b, c, d, c, e não é uma trilha

a, b, c, d, c, e não é um caminho

a, b, c, f, b, g é uma trilha

a, b, c, f, b, g não é um caminho

h, b, c, d é um caminho

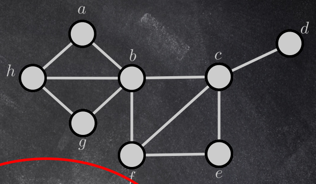
a, b, h, a é um ciclo ímpar

a, b, g, h, a é um ciclo par

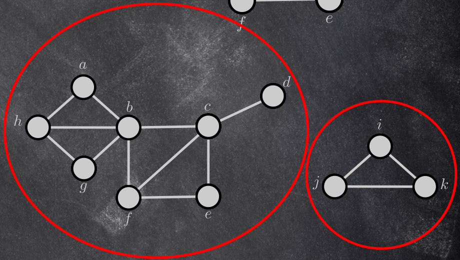
Luís Felipe
09/09/22

Conexidade

- Um grafo G é conexo
  se existe caminho entre
  qualquer par de vértices de G.



- Um grafo G é desconexo
  quando não é conexo.



- Uma componente conexa
  de um grafo G é um subgrafo conexo maximal.
  - Denotamos por $w(G)$
    o número de componentes conexas de G.

Luís Felipe

09/09/22

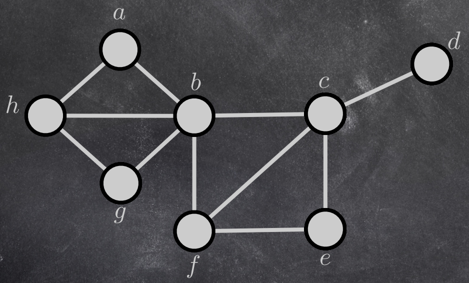
Distância, Excentricidade, Diâmetro e Centro

- A distância entre dois vértices $u, v \in V$, denotada por $d(u, v)$, é o tamanho do menor caminho entre u e v em G.
  - Quando não há caminho entre os vértices u, v, $d(u, v) = \infty$
- A excentricidade de um vértice $v \in V$, denotada por $e(v)$, é o valor da maior distância entre v e os demais vértices de V.
- O diâmetro de um grafo G, denotado por $\text{diam}(G)$ é o valor da maior excentricidade dos vértices de G.
- O centro de um grafo G, denotado por $C(G)$, é o conjunto dos vértices de menor excentricidade do grafo.

Luís Felipe

09/09/22

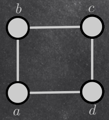
Exercício: Determine as distâncias entre todos os pares de vértices, a excentricidade de cada vértice, o diâmetro e o centro do grafo abaixo.

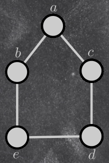


Luís Felipe
09/09/22

(Outros) Tipos importantes de grafos

- Um grafo é um grafo ciclo de tamanho n, denotado por C_n, $n \geq 3$, se G consiste de um único ciclo.



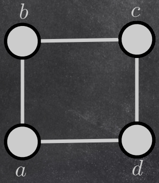


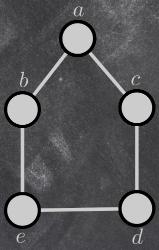
- Um grafo é um grafo caminho de tamanho $n-1$, denotado por P_n, $n \geq 2$, se G consiste de um único caminho com n vértices.

Luís Felipe
09/09/22

Caracterização de Grafos Bipartidos

Exercício: Determine se os seguintes grafos são bipartidos.





- Note que não existe bipartição para o C_5.

Luís Felipe
09/09/22

Caracterização de Grafos Bipartidos

Teorema 3. Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se, e somente se, G não possui ciclo ímpar.

Luís Felipe

09/09/22

Demonstração (ida)

Prova:

$\Rightarrow$ Seja G bipartido com bipartição em X e Y e seja $C = v_0, v_1, \cdots, v_k, v_0$ um ciclo arbitrário de G. Suponha, sem perda de generalidade, que $v_0 \in X$. Assim, como $v_0 v_1$ é uma aresta de G e G é bipartido, temos que $v_1 \in Y$. Da mesma forma, $v_2 \in X$. De modo geral, $v_{2i} \in X$ e $v_{2i+1} \in Y$. Note que colocamos v_0 em X, e como existe a aresta $v_k v_0$ em G, então v_k pertence a Y. Ou seja, k é ímpar ($k = 2i + 1$, para algum i). Isso implica que C, de tamanho $k + 1$, possui tamanho par.

Luís Felipe
09/09/22

Demonstração (volta)

Prova (continuação):

$\Leftarrow$

Note que é suficiente considerarmos G conexo (se G não fosse conexo, bastava analisar cada componente conexa separadamente). Suponha G um grafo sem ciclos ímpares. Escolha um vértice arbitrário $u \in V(G)$. Como G é conexo, definimos uma partição dos vértices de G em relação a distância dentre u e os demais vértices de V pela seguinte associação:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in V \mid d(u,x) \text{ é par } \} \\ Y &= \{y \in V \mid d(u,y) \text{ é ímpar } \} \end{aligned}$$

Resta mostrar que X e Y formam uma bipartição de $V(G)$, ou seja, vamos mostrar que não há aresta entre dois vértices de uma mesma parte.

Luís Felipe
09/09/22

Demonstração (volta, continuação)

Prova (continuação):

Considere v e w dois vértices de X. Portanto, a distância entre u e v é par, bem como a distância entre u e w é par.

Considere P um caminho de menor comprimento de u até v e Q um caminho de menor comprimento de u até w.

Considere u' o último vértice comum que pertença tanto a P quanto a Q (note que, eventualmente, $u' = u$).

Como P e Q são caminhos de menores tamanhos, então os caminhos de u até u' tanto em P quanto em Q possuem o mesmo tamanho.

Como P e Q possuem comprimentos pares, os caminhos entre u' e v e entre u' e w possuem a mesma paridade.

Implicando, então, que o caminho entre v e w utilizando arestas de P e Q, passando por u', possui comprimento par. Seja $P'Q'$ este caminho.

Luís Felipe
09/09/22

Demonstração (volta, conclusão)

Prova (conclusão):
Se v e w fossem vizinhos, teríamos, portanto, um ciclo ímpar obtido pelo caminho $P'Q'$ e pela aresta vw.

Porém, dado que não existe ciclo ímpar em G (por hipótese), então não existe a aresta vw. Ou seja, não existe aresta entre dois vértices da mesma parte X.

Analogamente, segue para quando analisamos dois vértices de Y.

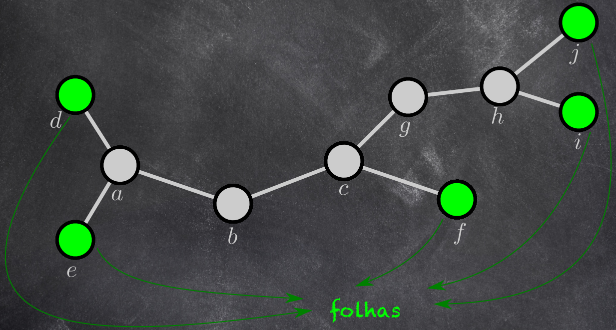
Luís Felipe

09/09/22

Árvores

Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

Exemplo 1:



OBS.: Toda árvore é, por definição, um grafo bipartido.

Luís Felipe

09/09/22

Árvores

Teorema 4. Um grafo é uma árvore se, e somente se, entre cada par de vértices existe um único caminho.

- Dem.:
  ($\leftarrow$) Se, entre cada par de vértices existe caminho, então G é conexo. Além disso, como o caminho é único, G não possui ciclos.

Luís Felipe

09/09/22

Árvores

- Dem. (continuação):

  ($\rightarrow$) Agora, seja G uma árvore e suponha que, entre os vértices u e w existam dois caminhos distintos P e P'.
  Tome $xy \in E(P)$ tal que $xy \notin E(P')$.
  Considere o subgrafo induzido por $P \cup P'$ e remova deste subgrafo a aresta xy. Note que $(P \cup P') \setminus \{xy\}$ é conexo. Logo, existe um caminho P'' entre x e y neste subgrafo. Portanto $P'' + \{xy\}$ é um ciclo em G. Absurdo.