# Aula 3 - Isomorfismos e Representações de Grafos

Luís Felipe

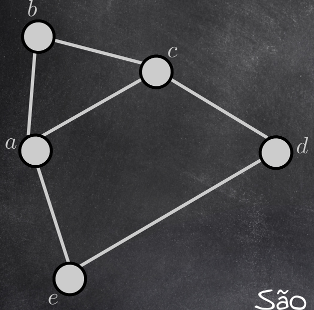
UFF

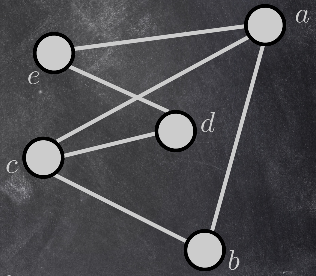
02 de Setembro de 2022

Luís Felipe
02/09/22

# O problema do Isomorfismo

Observe os seguintes grafos:




São distintos?
Não!!

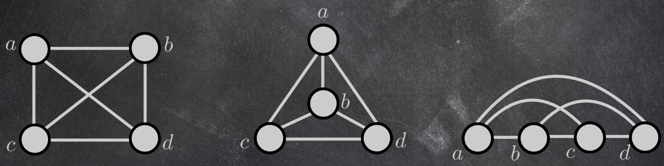
- $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{ab, ac, ae, bc, cd, de\}$

Luís Felipe

02/09/22

# O problema do Isomorfismo

Exemplo 1: Observe algumas representações para o $K_4$.



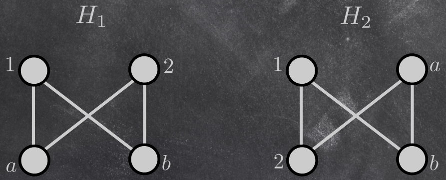
Luís Felipe

02/09/22

# O problema do Isomorfismo

Apesar de duas representações geométricas distintas poderem associar a um mesmo grafo, duas representações geométricas iguais podem representar grafos distintos.

Exemplo 2:




$V(H_1) = V(H_2) = \{1, 2, a, b\}$, mas
$E(H_1) = \{1a, 1b, 2a, 2b\} \neq \{12, 1b, 2a, ab\} = E(H_2)$

Porém, se renomeássemos os vértices (trocando 2 com $a$), voltaríamos a ter o mesmo grafo.

Luís Felipe

02/09/22

# O problema do Isomorfismo

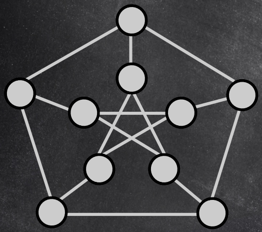
- Dadas duas representações geométricas, elas correspondem a um mesmo grafo?
- Ou seja, é possível fazer as duas representações coincidirem de modo a preservar as adjacências?

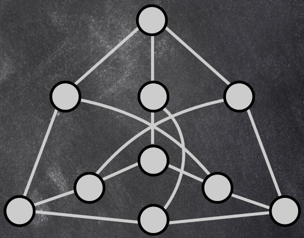
Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são isomorfos e denotamos por $G_1 \approx G_2$ se existir uma função bijetora $f : V_1 \to V_2$ que satisfaça:

$$ab \in E_1 \text{ se e somente se } f(a)f(b) \in E_2.$$

Luís Felipe
02/09/22

# Exemplo





- Esses dois grafos são isomorfos? Sim!!! Por que?

Luís Felipe
02/09/22

# Problema do Isomorfismo

Dados grafos $G_1$ e $G_2$, $G_1 \approx G_2$? Ainda não se sabe a complexidade deste problema, sendo ele, portanto, um problema em aberto.

- O problema de isomorfismo em grafos é uma restrição do problema de isomorfismo de subgrafos. Este sim é sabidamente difícil de resolver computacionalmente. (Obs.: Conteúdo de ASA!!!)

Contudo, podemos listar algumas condições que são necessárias para que dois grafos sejam considerados isomorfos:

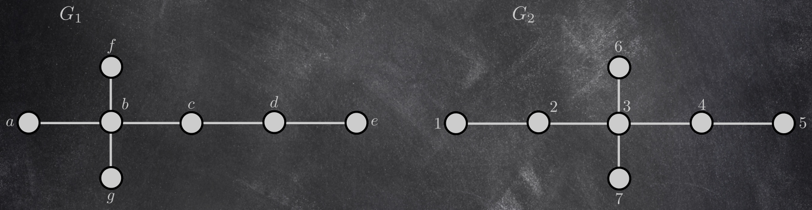
- Mesma quantidade de vértices;
- Mesma quantidade de arestas;
- Mesma quantidade de vértices com um mesmo grau.

Essas condições são suficientes???

Luís Felipe
02/09/22

# Problema do Isomorfismo

Exemplo: Os grafos $G_1$ e $G_2$



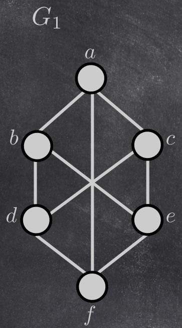

são isomorfos?

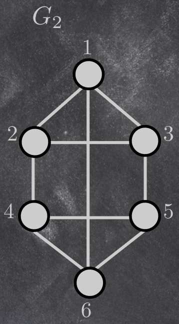
Não, pois se existir uma função de isomorfismo, ela mapeia o vértice $b$ no vértice 3 e não existem, em $G_2$, 3 vértices de grau 1 adjacentes a 3.

Luís Felipe
02/09/22

# Problema do Isomorfismo

Exemplo: Os grafos $G_1$ e $G_2$




são isomorfos?

Exercício! Dica: repare nas arestas $12$, $23, 13$.

Luís Felipe

02/09/22

# Representações de um grafo

- Na Aula 1 vimos que podemos representar um grafo:
  - Através da enumeração de seus vértices e arestas, e
  - Através da representação geométrica no plano.
- Mas como podemos representar um grafo no computador? Veremos 3 maneiras:
  - Matriz de adjacência,
  - Matriz de incidência, e
  - Lista de adjacência

Luís Felipe

02/09/22

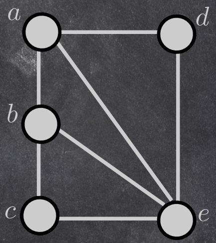
# Matriz de Adjacência

Dado um grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, a **matriz de adjacência** $G$ é uma matriz $n \times n$ tal que:

$$A_{n\times n} = [a_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} & = & 1, \text{ se } v_iv_j \in E; \\ a_{ij} & = & 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1:

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| b | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| c | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| d | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| e | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |



Luís Felipe

02/09/22

# Propriedades

A matriz de adjacência de um grafo

- Possui diagonal principal nula.
- É simétrica com relação à diagonal principal.
- A soma de cada linha ou coluna fornece o grau do vértice associado.
- Possui $2m$ entradas não nulas
- uma matriz de adjacência caracteriza univocamente um grafo.

Luís Felipe
02/09/22

# Propriedades

OBS.: Diversas matrizes de adjacência podem corresponder a um mesmo grafo $G$. Basta permutar os vértices.

Exemplo 2: $(a, b, c, d, e) \rightarrow (c, d, a, b, e)$

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $b$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $c$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $d$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $e$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$\rightarrow$

| | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $d$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $a$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $b$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $e$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Luís Felipe
02/09/22

# Matriz de Incidência

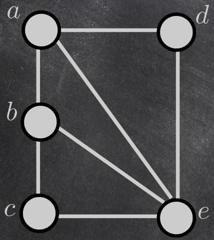
Dado um grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, a matriz de incidência $G$ é uma matriz $n \times m$ tal que:

$$M_{n\times m} = [m_{ij}] = \begin{cases} a_{ij} & = & 1, \text{ se } e_j \text{ é incidente a } v_i; \\ a_{ij} & = & 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Luís Felipe

02/09/22

## Exemplo 3:




| | ab | ad | ae | bc | be | ce | de |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| c | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| d | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| e | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Luís Felipe
02/09/22

# Propriedades

A matriz de incidência de um grafo

- Possui $2m$ entradas não nulas
- Uma matriz de incidência caracteriza univocamente um grafo.

Luís Felipe
02/09/22

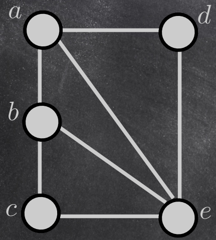
# Matriz aresta $\times$ aresta

Dado um grafo $G = (V, E)$, onde $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, a matriz aresta $\times$ aresta de $G$ é uma matriz $m \times m$ tal que:

$$C_{m\times m} = [c_{ij}] = \begin{cases} c_{ij} = 1, & \text{se } e_i \text{ é adjacente a } e_j; \\ c_{ij} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Luís Felipe
02/09/22

## Exemplo 4:




| | $ab$ | $ad$ | $ae$ | $bc$ | $be$ | $ce$ | $de$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $ab$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $ad$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $ae$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $bc$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $be$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $ce$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $de$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Quantas entradas não nulas?? $\sum_{v\in V(G)} d(v)(d(v)-1)$.
Por que?

Tome um vértice $v \in V(G)$. Cada aresta com extremo em $v$ possui $d(v)-1$ vizinhos com extremos a $v$. Façamos essa contagem para todos os vértices de $G$.

Obs.: Veja questão 11 da lista 1.

Luís Felipe
02/09/22

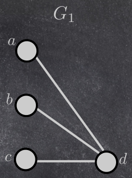
# Propriedades

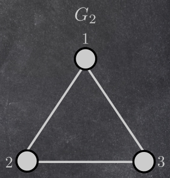
A matriz aresta $\times$ aresta de um grafo

- Possui diagonal principal nula,
- É simétrica com relação à diagonal principal,
- NÃO representa um grafo!!!! Existem grafos não isomorfos com a mesma matriz $C$.

Exemplo 5:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$




$G_1 \not\approx G_2$

Luís Felipe
02/09/22

# Lista de Adjacência

- Em uma Lista de Adjacência cada vértice está associado a um vetor de dimensão $n$ (número de vértices no grafo)
- Cada vértice possui uma lista de vértices adjacentes

Luís Felipe

02/09/22

# Lista de Adjacência

Exemplo 6:

Luís Felipe
02/09/22

# Matriz × Lista de Adjacência

- Qual a melhor estrutura de dados para representar um grafo em um computador?
  Para responder a esta pergunta, vamos descrever as desvantagens de cada tipo de representação.
  - Desvantagem da representação matricial:
    Com grafos esparsos, a matriz é formada principalmente de zeros, o que gera grande consumo de memória desnecessário.
  - Desvantagem da representação por listas:
    Em grafos onde os vértices têm muitos vizinhos (mas ainda bem menos do que $n$), as listas ficam longas, o que pode aumentar o tempo de acesso.

Luís Felipe
02/09/22

# Vantagens / Desvantagens

| Tempo de execução | Matriz | Lista |
|---|---|---|
| Inserir aresta | $O(1)$ | $O(1)$ |
| Remover aresta | $O(1)$ | $O(\Delta)$ |
| Testar adjacência | $O(1)$ | $O(\Delta)$ |
| Listar vizinhos de $v \in V$ | $O(n)$ | $O(\Delta)$ |

Logo, a melhor estrutura depende do algoritmo!