Aula 2 - Conceitos básicos (parte II)

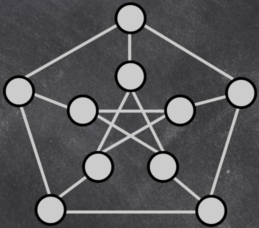
Luís Felipe

UFF

31 de Agosto de 2022

Luís Felipe
31/08/22

- Um grafo é d-regular se $d(v) = d, \forall v \in V$.
- Um grafo 3-regular é chamado de grafo cúbico.
  Exemplo: O grafo de Petersen é cúbico.

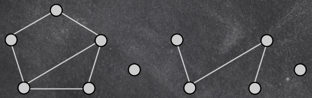


- Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo de um grafo G, respectivamente.
- Se $\Delta(G) = 3$, dizemos que G é um grafo subcúbico.
- A sequência de graus de um grafo G é a sequência não crescente dos graus dos vértices de G.

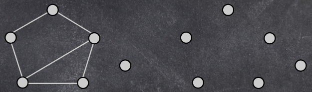
Luís Felipe
31/08/22

Subgrafos

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. $H = (V(H), E(H))$ é dito **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V$ e $E(H) \subseteq E$.



- Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um **subgrafo gerador** de G se H é subgrafo de G e $V(H) = V$.

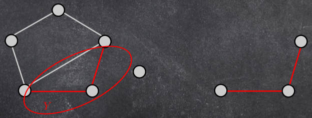


Luís Felipe
31/08/22

Subgrafos

- Seja $X \subseteq V$. Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um subgrafo induzido de G por X, denotado por $H = G[X]$ se $V(H) = X$ e $E(H) = \{vw \in E(G) \mid v, w \in X\}$.

- Seja $Y \subseteq E$. Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ é um subgrafo induzido de G por Y, denotado por $H = G[Y]$ se $E(H) = Y$ e $V(H) = \{v, w \in V(G) \mid vw \in Y\}$.

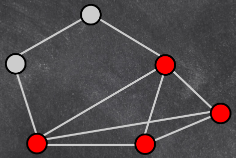


Luís Felipe
31/08/22

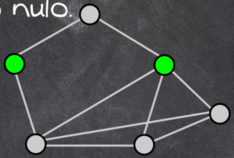
Cliques e Conjuntos independentes

Dado um grafo G,

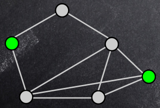
- Uma clique de G é um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal $G[V']$ é um grafo completo.



- Um conjunto independente de G é conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que $G[V']$ é grafo nulo.



Existe outro conjunto independente?



Existe conjunto independente maior?

Não!!!

Luís Felipe
31/08/22

Máximo x Maximal

- Um subgrafo H de G é maximal (resp. minimal) com relação a uma propriedade $\mathcal{P}$ se H satisfaz $\mathcal{P}$ e não existe H' satisfazendo $\mathcal{P}$ tal que $H \subset H'$ (resp. $H' \subset H$).
- Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ de G é máximo (resp. mínimo) com relação a uma propriedade $\mathcal{P}$, em relação a vértices, se, dentre todos os subgrafos H' de G maximais (resp. minimais) com relação a propriedade $\mathcal{P}$, $|V(H)| \geq |V(H')|$ (resp. $|V(H)| \leq |V(H')|$)

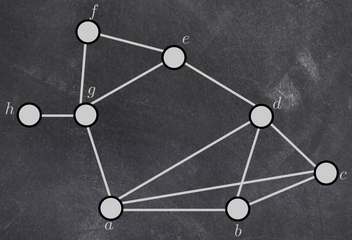
Obs.: Para um subgrafo ser máximo (mínimo) em relação a uma propriedade $\mathcal{P}$ para arestas, então devemos alterar as relações de tamanho de conjuntos de acordo, ou seja, os tamanhos a serem analisados são de conjuntos de arestas.

Luís Felipe

31/08/22

Máximo x Maximal

Exemplo: Enumere todos os conjuntos independentes e cliques maximais do grafo abaixo. Identifique a cardinalidade do conjunto independente máximo e da clique máxima.



Luís Felipe
31/08/22

Teorema do Aperto de Mãos

Seja $G = (V, E)$, tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. Então,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

- Prova: Uma aresta incrementa o grau dos seus dois extremos em uma unidade. Logo, ao somarmos os graus de todos os vértices de um grafo, estamos considerando cada aresta duas vezes.

Luís Felipe
31/08/22

Corolário 1

O número máximo de arestas em um grafo é $\frac{n(n-1)}{2}$.

- Prova: O grafo com maior número possível de arestas é um grafo completo. Ele, por definição, é um grafo $(n-1)$-regular. Basta utilizar o Teorema do Aperto de Mãos para finalizar a demonstração. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = n(n-1) = 2m \;\therefore\; m = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Alguma outra ideia?

Luís Felipe
31/08/22

Corolário 2

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

- Prova: Pelo Teorema do Aperto de Mãos, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Note que $\sum_{v \in V} d(v)$ pode ser separada em termos de valores pares e ímpares. Ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é ímpar}} d(v) + \sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é par}} d(v) = 2m \therefore$$

$$\sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é ímpar}} d(v) = 2m - \sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é par}} d(v).$$

1. A soma de pares é um número par, então $\sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é par}} d(v)$ é par.
2. $2m$ é par, e como a subtração de pares é um par, então $\sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é par.
3. Cada termo de $\sum_{v \in V,\ d(v) \text{ é ímpar}} d(v)$ é ímpar. Seja essa soma igual a $(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \cdots + (2k_\ell + 1)$. Como essa soma é par e há um 1 para cada termo, então ℓ é par.