Aula 21 - Grafos direcionados

Luís Felipe

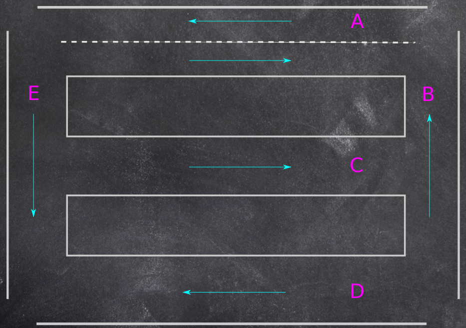
UFF

30 de Novembro de 2022

Luís Felipe
30/11/22

Motivação

Queremos construir um grafo que modele o esquema de trânsito em um quarteirão formado pelas ruas A,B,C,D e E.

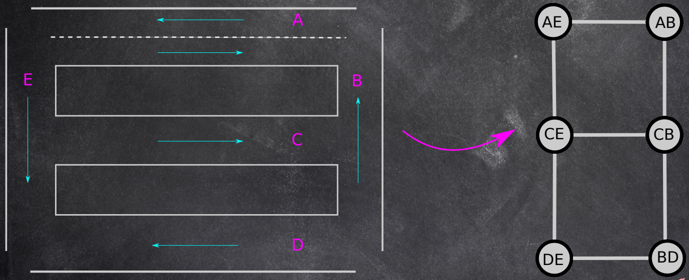


Luís Felipe
30/11/22

Motivação

Vamos modelar o problema com o seguinte grafo:

- esquina → vértice
- rua entre esquinas → aresta



Este grafo representa bem o diagrama?

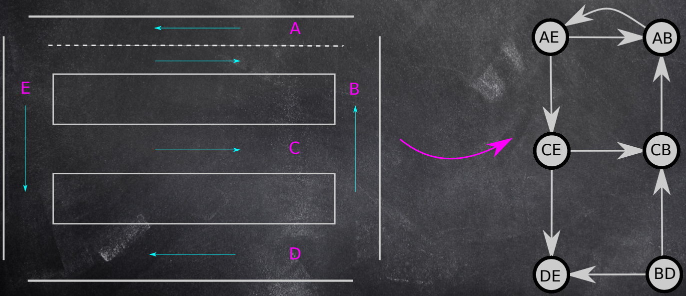
NÃO!!

Luís Felipe
30/11/22

Motivação

Para mantermos as informações de trânsito do diagrama, vamos modelar o problema com o seguinte grafo **direcionado**:

- esquina → vértice
- rua entre esquinas → aresta direcionada

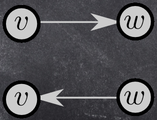


Luís Felipe
30/11/22

Definição

Um grafo direcionado ou digrafo D é um par ordenado (V, E), denotado por $D = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio de vértices e E é um conjunto de pares ordenados de vértices distintos de V denominados arestas direcionadas ou arcos.

Assim, em um digrafo, cada aresta direcionada (v, w) possui uma única direção: de v para w.
Note que $(v, w) \neq (w, v)$.



Luís Felipe
30/11/22

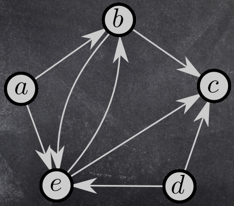
Definições e exemplo

- Dada uma aresta direcionada $e = (v, w)$, dizemos que (v, w) é divergente de v e convergente a w.

- Além disso, v é dito cauda de (v, w) e w a cabeça de (v, w).

- Em um digrafo simples D, se $(v, w) \in E(D)$, v é dito predecessor de w e w é dito sucessor de v.

- Exemplo: $D = (V, E)$ $V = \{a, b, c, d, e\}$
  $E = \{(a, b), (b, c), (a, e), (b, e), (e, b), (e, c), (d, c), (d, e)\}$



Luís Felipe
30/11/22

Definições e exemplo

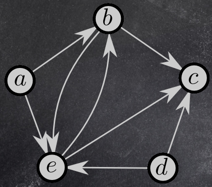
- O grafo G não direcionado obtido a partir de D pela remoção das direções das arestas é dito **grafo subjacente de D**. D é dito uma **orientação de G**.

Exemplo:

Luís Felipe
30/11/22

Conceitos Básicos

- O grau de entrada de v, denotado por $d^-(v)$ é o número de arestas direcionadas que convergem para v.
- O grau de saída de v, denotado por $d^+(v)$ é o número de arestas direcionadas que divergem de v.
  - Se $d^-(v) = 0$, então v é dito fonte de D.
  - Se $d^+(v) = 0$, então v é dito sumidouro de D.
- Obs.: $\sum_{v \in V} d^+(v) = |E(D)| = \sum_{v \in V} d^-(v)$.
- Exemplo:



$d^-(a) = 0$ $\quad$ $d^+(a) = 2$ fonte

$d^-(b) = 2$ $\quad$ $d^+(b) = 2$

$d^-(c) = 3$ $\quad$ $d^+(c) = 0$ sumidouro

$d^-(d) = 0$ $\quad$ $d^+(d) = 2$ fonte

$d^-(e) = 3$ $\quad$ $d^+(e) = 2$

Luís Felipe

30/11/22

Vizinhança

- A vizinhança de entrada de v, denotada por $N^-(v)$ é o conjunto de todos os vizinhos de entrada de v, ou seja, todos os vértices com arestas direcionadas que convergem para v.
- A vizinhança de saída de v, denotada por $N^+(v)$ é o conjunto de todos os vizinhos de saída de v, ou seja, todos os vértices com arestas direcionadas que divergem de v.

Luís Felipe
30/11/22

Conceitos Básicos

- Os conceitos de passeio, trajeto, caminho, ciclo são definidos de maneira análoga à forma como foram definidos para grafos simples.
  - OBS.: Em digrafos, podemos ter ciclos de comprimento 2.

- Um vértice v alcança um vértice u, se existe um caminho direcionado de v para u.

- Um digrafo $D = (V, E)$ é fortemente conexo se, para todo $u, v \in V$, u alcança v e v alcança u.

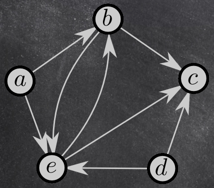
- Um digrafo $D = (V, E)$ é unilateralmente conexo se, para todo $u, v \in V$, u alcança v ou v alcança u.

- Um digrafo $D = (V, E)$ é fracamente conexo se o grafo subjacente de D for conexo.

Luís Felipe
30/11/22

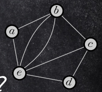
Conceitos Básicos

- Exemplo:



D é fracamente conexo?

SIM!!



D é unilateralmente conexo?

NÃO!!

a não alcança d
d não alcança a

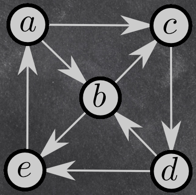
D é fortemente conexo?

NÃO!!

Luís Felipe
30/11/22

Exemplo

Verifique se o digrafo abaixo é fortemente conexo.



OBS.: Um digrafo fortemente conexo é, claramente, unilateralmente conexo e fracamente conexo.

Luís Felipe
30/11/22

Teorema. Se D é um digrafo sem ciclos direcionados, então D tem sumidouro e fonte.

Prova: Por absurdo, suponha que D não possui sumidouro. Seja $v_1 \in V$. v_1 não é sumidouro, logo existe $v_2 \in V$ tal que $v_1 v_2 \in E$. v_2 também não é sumidouro, logo existe $v_3 \in V$, $v_3 \neq v_1$ (caso contrário, D teria ciclo direcionado) tal que $v_2 v_3$. Note que este processo se repetirá indefinidamente. Absurdo, pois D tem um número finito de vértices.

A prova para fonte é análoga (exercício).

Luís Felipe
30/11/22

Teorema (Gallai). Um digrafo D possui um caminho direcionado com tamanho $\chi(D) - 1$.

Prova: Seja A' um conjunto minimal de arcos de D tal que $D' = D \setminus A'$ não contenha ciclos direcionados. Seja k o tamanho de um maior caminho direcionado de D'.

Atribua cores $1, 2, \cdots, k+1$ aos vértices de D', da seguinte forma:

- Tome um vértice v qualquer;
- Tome um maior caminho direcionado em D' com origem em v;
- Atribua a cor i a v se o caminho tem tamanho $i - 1$. (note, por exemplo, que sumidouro recebe cor 1)

Denote por V_i o conjunto de vértices que recebem a cor i. Queremos mostrar que $(V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ é uma $(k+1)$-coloração própria de D.

Luís Felipe
30/11/22

Continuação

Vamos mostrar a seguinte afirmação: A origem e o fim de qualquer caminho direcionado em D' possui diferentes cores.

Seja P um caminho direcionado de u até v em D' e suponha $v \in V_i$. Portanto, existe um caminho direcionado $Q = (v_1, v_2, \cdots, v_i)$ em D', tal que $v_1 = v$.

Como D' não contém ciclos direcionados, então PQ é um caminho direcionado com origem em u e com tamanho pelo menos i. Portanto, $u \notin V_i$.

Luís Felipe
30/11/22

Conclusão

Vamos mostrar, agora, a seguinte afirmação: Os extremos de qualquer arco de D possuem diferentes cores.

Suponha que $(u, v) \in A(D)$:

Se $(u, v) \in A(D')$, então (u, v) é um caminho direcionado em D', e assim, u e v recebem cores diferentes.

Se $(u, v) \notin A(D')$, então $(u, v) \in A'$. Por conta da minimalidade de A', temos que $D' + (u, v)$ contém um ciclo direcionado C. Note que $C - (u, v)$ é um caminho direcionado de v para u em D', e assim, também neste caso, u e v possuem cores diferentes.

Dessa forma, de fato, $(V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ é uma $(k+1)$-coloração própria de D. Com isso, $\chi \leq k + 1$.

Portanto, D possui um caminho direcionado de tamanho k, tal que $k \geq \chi - 1$.

Luís Felipe
30/11/22

Consequência

Obs.: Todo grafo G possui uma orientação na qual o tamanho do maior caminho direcionado é $\chi - 1$.

Dada uma χ-coloração de G com os conjuntos dos vértices $V_1, V_2, \cdots, V_\chi$ com cores $1, 2, \cdots, \chi$, respectivamente, atribuamos a seguinte orientação:

- Tome $uv \in G$, tal que $u \in V_i$ e $v \in V_j$, para $i < j$ (ou seja, u recebe cor i e v recebe cor j, para $i < j$);
- Atribua o arco (u, v) para o grafo direcionado associado.

Note que nenhum caminho direcionado nesta orientação de G tem tamanho maior que $\chi - 1$ (ou seja, não contém mais do que χ vértices), pois nenhum par de vértices do caminho possuem a mesma cor.

Se u e v tivessem mesma cor, não seriam vizinhos. Porém há caminho direcionado de u a v, assim, há uma sequência crescente de cores desde u até v (associando aos arcos atribuídos). Contradição por u e v receberem mesma cor.

Luís Felipe
30/11/22

Torneio

- Um torneio é um digrafo cujo grafo subjacente é completo.

- Um rei é um vértice que alcança qualquer outro vértice com, no máximo, 2 arcos.

Corolário. Todo torneio possui um caminho Hamiltoniano direcionado.

Prova: Dado um torneio D, temos que $\chi(D) = n$ e, pelo teorema anterior, existe um caminho direcionado com tamanho $n-1$.

Luís Felipe
30/11/22

Teorema (Chvàtal & Lovász). Se D é um digrafo, então D possui um conjunto independente S tal que, $\forall v \in V(D) \setminus S$, v é alcançado por algum vértice de S num caminho de tamanho menor ou igual a 2.

Prova: Indução forte sobre n.

Base: O teorema é verdadeiro para $n = 1$.

HI: Suponha que o teorema seja verdadeiro para todos os dígrafos com menos que n vértices. Ou seja, se D' possui no máximo $n - 1$ vértices, então D' possui um conjunto independente S' tal que todo vértice $v \in V(D') \setminus S'$ é alcançado por algum vértice de S num caminho de tamanho menor ou igual a 2.

Luís Felipe
30/11/22

Conclusão

Passo Seja D um dígrafo arbitrário com n vértices e seja v um vértice arbitrário de D. Pela HI, existe um conjunto independente S' em $D' = D - (\{v\} \cup N^+(v))$, tal que cada vértice de D' que não está em S' é alcançado por um vértice de S' por um caminho direcionado de tamanho no máximo 2.

Se v é extremo de um arco (u, v), tal que $u \in S'$, então cada vértice de $N^+(v)$ é alcançável por u por um caminho direcionado de tamanho 2. Portanto, neste caso, $S = S'$ satisfaz a propriedade requerida.

Caso contrário, v não é extremo de um acro (u, v) com $u \in S'$, então v não é vizinho a nenhum vértice de S' (note que $N^+(v)$ não está contida em D', e, dessa forma, também não contém S'). Portanto, o conjunto independente $S = S' \cup \{v\}$ satisfaz a propriedade requerida.

Luís Felipe
30/11/22

Corolário. Todo torneio tem um rei.

Prova: Note que em um torneio, $\alpha = 1$.