Aula 20 - Grafos planares (parte II)

Luís Felipe

UFF

25 de Novembro de 2022

Luís Felipe
25/11/22

Na aula passada vimos...

- Definição de Grafos planares.
- Definições de faces, grafo dual e suas consequências.
- Relação de Euler e suas consequências.
- Exemplos (demonstrações) de grafos que não são planares.
  - K_5 não é planar
  - $K_{3,3}$ não é planar

Luís Felipe
25/11/22

Outras consequências

Lema. Se G é planar, então todo subgrafo de G é planar.

Prova. Por contrapositiva, suponha que existe um subgrafo H de G que não possua uma representação plana. Como H não é planar, então há ao menos duas arestas cruzando em qualquer representação de H no plano. Como todas as arestas de H também são arestas de G, logo essas mesmas arestas que se cruzam em H, se cruzam em G. Assim, G não é planar.

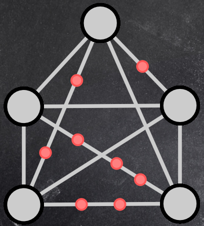
Corolário. Todo grafo G planar não possui como subgrafo o K_5 nem o $K_{3,3}$.

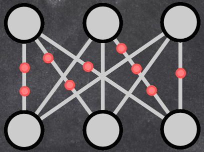
Prova. K_5 e $K_{3,3}$ não são planares (Aula 19). Assim, pelo lema anterior, temos o resultado.

Luís Felipe
25/11/22

Subdivisão de um grafo

Qualquer grafo obtido a partir de um grafo G pela inserção de vértices de grau 2 nas suas arestas é uma subdivisão de G.





Luís Felipe
25/11/22

Outras consequências

Lema. Se G é não planar, então toda subdivisão de G é não planar.

Prova. Por contrapositiva, suponha que existe uma subdivisão H de G que seja planar. Dessa forma, tome a representação plana de H. Para todo vértice de H que não seja de G, temos que se $u \in V(H) \setminus V(G)$, então existem dois vértices v e w em H tais que vu e uw pertencem a H. Dessa forma, façamos a seguinte transformação: remova o vértice u e adicione a aresta vw. Como v, u, w é uma representação plana, então vw também não possui cruzamento com outra aresta. Faça isso enquanto houver vértice em $V(H) \setminus V(G)$. Ao final, obtemos G em sua representação plana.

Corolário. Todo grafo G planar não contém subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$.

Prova. K_5 e $K_{3,3}$ não são planares (Aula 19). Assim, pelo lema anterior, temos o resultado.

Luís Felipe
25/11/22

Caracterização

Obs.: O último corolário é, além de ser uma condição necessária, uma condição suficiente.

Teorema (Kuratowski). G é planar se, e somente se, G não contém subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

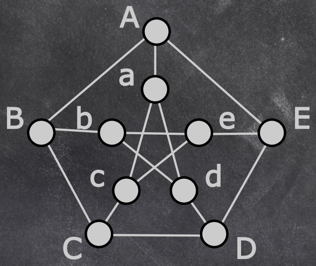
Uma caracterização mais imediata é a seguinte:

Obs. G é planar se, e somente se, cada bloco de G é planar.

Luís Felipe
25/11/22

Aplicação

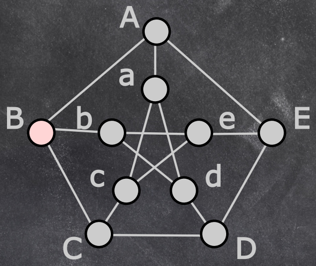
Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.



Luís Felipe
25/11/22

Aplicação

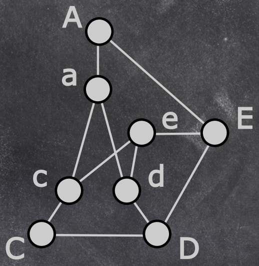
Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.



Luís Felipe
25/11/22

Aplicação

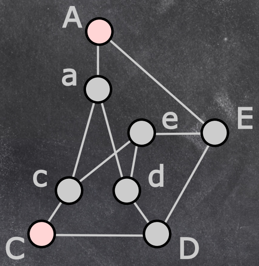
Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.



Luís Felipe
25/11/22

Aplicação

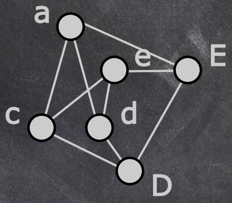
Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.



Luís Felipe
25/11/22

Aplicação

Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.

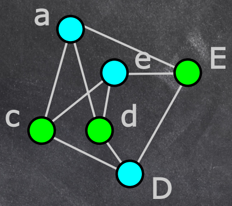


Luís Felipe

25/11/22

Aplicação

Vamos provar que o grafo de Petersen é não planar. Ou seja, vamos verificar que este grafo contém uma subdivisão do $K_{3,3}$.



Luís Felipe
25/11/22

Grafos planares e coloração de vértices

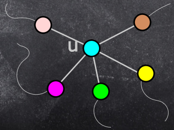
Na aula passada (Aula 19) provamos que se G é planar então $\delta \leq 5$. Com isso, conseguimos provar:

Teorema. Todo grafo planar é 6-colorível.

Prova: Indução em n. Para todos os grafos planares com no máximo 6 vértices, o teorema é trivialmente verdadeiro (basta tomar, por exemplo, uma cor pra cada vértice).

Assuma que todos os grafos planares com no máximo $n-1$ vértices sejam 6-coloríveis.

Tome G um grafo planar com n vértices. Como G é planar, então existe um vértice u de grau $d(u) \leq 5$. Remova u. Assim, o grafo $G \setminus \{u\}$ é 6-colorível. Como $|N_G(u)| \leq 5$, uma das 6 cores da 6-coloração de $G \setminus \{u\}$ está disponível para u em G.

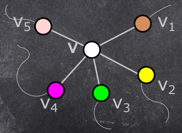


Luís Felipe
25/11/22

Teorema. Todo grafo planar é 5-colorível.

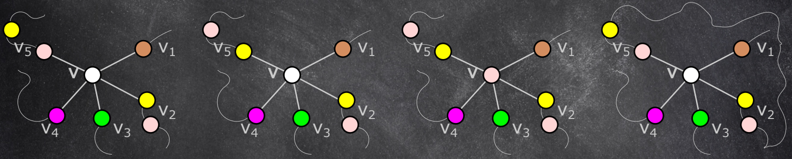
Prova. Suponha, por contradição, que o teorema é falso. Assim, tome um grafo planar G 6-crítico.Sabemos, ainda, que $\delta \leq 5$ (Aula 19) e que $\delta \geq 5$ (Se G é k-crítico então $\delta \geq k-1$). Dessas duas desigualdades, temos que $\delta = 5$.

Seja v um vértice de grau 5 em G e sejam V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 as 5 cores usadas em $G \setminus v$. Como assumimos G não ser 5-colorível, então essas 5 cores cores são usadas nos 5 vizinhos de v, ou seja, cada vizinho de v possui uma cor distinta. Caso contrário, existiria uma das 5 cores disponível para v e assim G seria 5-colorível. Assim, assuma que os vizinhos de v sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, cada v_i recebe a cor V_i, para $1 \leq i \leq 5$, e que esses vizinhos estejam dispostos em sentido horário.



Luís Felipe 25/11/22

Denote G_{ij} o subgrafo induzido por $G[V_i \cup V_j]$. Note que v_i e v_j devem, necessariamente, pertencer a mesma componente conexa de $G[V_i \cup V_j]$. Caso contrário, troque as cores i para j e j para i na componente que possui v_i. Assim, v_i e v_j possuem a mesma cor V_j e assim, a cor V_i estaria disponível pra v. Isso seria uma 5-coloração, contradição.



Considere a cuva de Jordan C formada pelos vértices v, v_2, v_5 e o caminho entre v_5 e v_2 que não passa por v (este caminho existe, como argumentado previamente).

Note que $v_1 \in int(C)$ e $v_4 \in ext(C)$. Portanto, como v_1 e v_4 devem, necessariamente, estar numa mesma componente conexa induzida pelas cores V_1 e V_4, então a curva de Jordan C' formada por v, v_1, v_4 cruza C. Assim, G não é planar. Contradição.