Aula 1 - Grafos: Motivação e Conceitos Básicos

Luís Felipe

UFF

26 de Agosto de 2022

Luís Felipe
26/08/22

O que é um Algoritmo??

- Sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas. (Wikipedia)
- Dado um problema, existem duas questões acerca da sua resolução:
  - Consigo resolvê-lo?
  - Consigo resolvê-lo eficientemente?

Luís Felipe

26/08/22

O problema das 7 pontes de Königsberg

Charge de Simon Kneebone, sobre as pontes de Königsberg.

Luís Felipe
26/08/22

O problema das 7 pontes de Königsberg

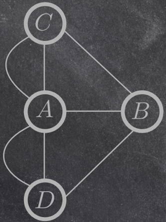
- Em 1736, na antiga Prússia
- Os moradores gostariam de saber se era possível um caminho que percorresse cada uma das sete pontes, sem repetição, e que retornasse ao ponto de partida.
- Solucionado por Leonhard Euler dando origem à Teoria dos Grafos.

Luís Felipe

26/08/22

O problema das 7 pontes de Königsberg

Modelagem utilizando Teoria dos Grafos:



Grafo que modela o problema das 7 pontes de Königsberg.

Luís Felipe

26/08/22

O problema das 7 pontes de Königsberg

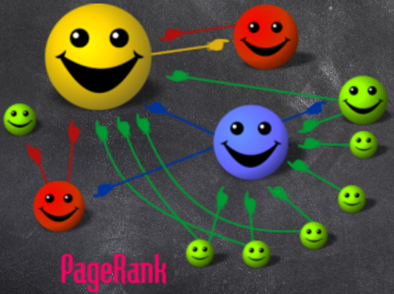
- Euler concluiu que não era possível efetuar o percurso sem repetição de arestas.
- Por quê?
- Cada nó ou vértice possui um número ímpar de arestas incidentes.

Luís Felipe
26/08/22

O que é um Grafo??

- Conjunto de pontos, chamados vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas. (Wikipedia)

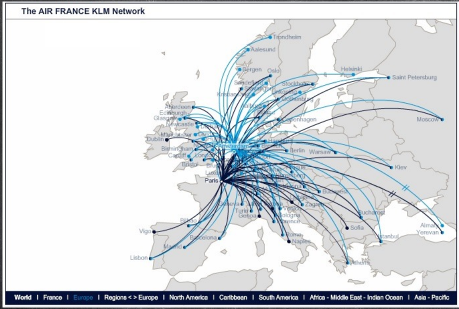
- Representação de relacionamento de objetos.
  - Quais objetos?
  - Quais relacionamentos?



Luís Felipe
26/08/22

Mapa aéreo

- Voos entre todas as cidades?
- Qual o menor número de voos entre duas cidades?



Luís Felipe

26/08/22

Vamos colorir??

Luís Felipe
26/08/22

Modelagem utilizando grafos

- Cada estado é um vértice
- Se os estados fazem fronteira, então os vértices correspondentes recebem uma aresta.
- Assim, o objetivo é colorir tal grafo com o menor número de cores de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas.

Luís Felipe

26/08/22

Vamos colorir??

Luís Felipe
26/08/22

Teorema das quatro cores

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

- Um único ponto não é considerado fronteira.

Luís Felipe
26/08/22

Teorema das quatro cores

- O problema surgiu em 1852 quando um advogado conjecturou que com 4 cores seria possível colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tivessem a mesma cor.
- Solucionado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, utilizando um computador IBM 360, que teve de realizar bilhões de cálculos.
- Em 1994 foi produzida uma prova simplificada por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas.
- Até hoje ninguém conseguiu uma demonstração do Teorema que não recorra a um computador.

Luís Felipe
26/08/22

Formalmente, um grafo é...

Um grafo simples, ou simplesmente grafo, é um par (V, E), denotado por $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V, denominados arestas.

Exemplo 1: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
$E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$
é um grafo.

Luís Felipe
26/08/22

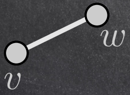
- Dado um grafo $G = (V, E)$, uma aresta $e \in E$ é denotada pelo par não-ordenado vw que a forma, onde $v, w \in V$.
  - v, w são ditos extremos de e.
  - e é dita incidente aos vértices v e w.
- Denotaremos por n a cardinalidade de V, i.e., $|V| = n$, e por m a cardinalidade de E, i.e., $|E| = m$.
- O tamanho do grafo G é $n + m$.

Luís Felipe
26/08/22

Representação geométrica no plano

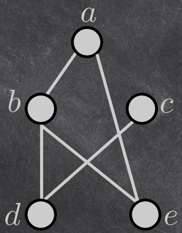
- Vértice v $\rightarrow$

- Aresta vw $\rightarrow$

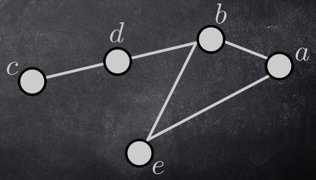


Luís Felipe
26/08/22

Exemplo 2: $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$
$E = \{ab, ae, bd, be, cd\}$



Esta é a única representação geométrica para o grafo G?



Luís Felipe

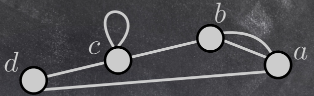
26/08/22

Multigrafo

Um multigrafo é um grafo que admite laços, i.e., arestas com extremos idênticos, e arestas paralelas, i.e., pares não ordenados iguais de elementos distintos de V.

Exemplo 3: $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$

$$E(G) = \{\underbrace{ab, ab}_{\text{arestas paralelas}}, bc, cd, da, \underbrace{cc}_{\text{laço}}\}$$



OBS.: Neste curso, salvo quando dito o contrário, os grafos considerados são grafos simples.

Luís Felipe
26/08/22

Vizinhança e grau de um vértice

- Dois vértices $v, w \in V$ são ditos adjacentes quando $vw \in E$.
- A vizinhança de um vértice $v \in V$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v em G.
- A vizinhança fechada de um vértice $v \in V$, denotada por $N[v]$, é dada por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
- O grau de um vértice $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes a v.

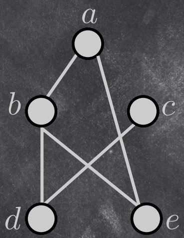
OBS.: Em um multigrafo, um laço adiciona 2 unidades ao grau do vértice.

Luís Felipe

26/08/22

Exemplo 4: Considerando o grafo do Exemplo 3

- $N(a) = \{b, e\}$ e $d(a) = 2$
- $N(b) = \{a, d, e\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{d\}$ e $d(c) = 1$
- $N(d) = \{b, c\}$ e $d(d) = 2$
- $N(e) = \{a, b\}$ e $d(e) = 2$

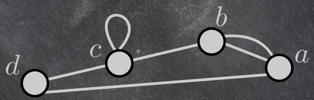


Luís Felipe

26/08/22

Exemplo 5: Considerando o grafo do Exemplo 4:

- $N(a) = \{b, d\}$ e $d(a) = 3$
- $N(b) = \{a, c\}$ e $d(b) = 3$
- $N(c) = \{c, b, d\}$ e $d(c) = 4$
- $N(d) = \{c, a\}$ e $d(d) = 2$

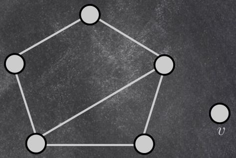


Luís Felipe
26/08/22

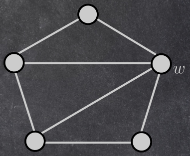
- Um vértice v é dito isolado quando $N(v) = \emptyset$.
- Um vértice v é dito universal quando $N[v] = V$.

Exemplo 6:

O vértice v é um vértice isolado.



O vértice w é um vértice universal.



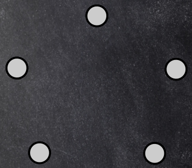
OBS.: Em um mesmo grafo G, não podemos ter um vértice isolado e um vértice universal.

Luís Felipe
26/08/22

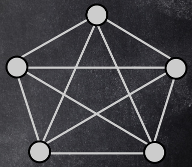
Tipos importantes de grafos

- Um grafo com apenas 1 vértice é dito trivial.

- Um grafo com n vértices é nulo, denotado por N_n, quando todos os seus vértices são isolados.



- Um grafo com n vértices é completo, denotado por K_n, quando todos os seus vértices são universais.



Luís Felipe

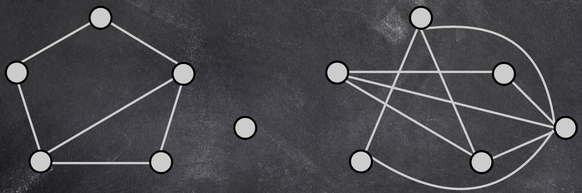
26/08/22

Complemento de um grafo

O complemento de um grafo G, denotado por $\overline{G}$, é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em G.

$$V(\overline{G}) = V(G)$$
$$E(\overline{G}) = \{vw | v, w \in V(G) \text{ e } vw \notin E(G)\}$$

Exemplo:



Grafo G à esquerda e seu complemento à direita.