# Aula 19 - Grafos planares

Luís Felipe

UFF

23 de Novembro de 2022

Luís Felipe
23/11/22

# Grafos Planares

- Um grafo é planar se existe uma representação plana para ele, i.e., uma representação onde não há cruzamento de arestas.

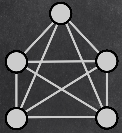
Exemplo:

Luís Felipe
23/11/22

# Grafos planares (ou não)

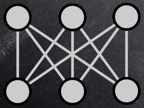
V ou F ???

- Toda árvore é um grafo planar.
- Todo grafo ciclo é um grafo planar.
- Todo grafo completo é um grafo planar.



planar ? NÃO!!

- Todo grafo bipartido é planar.

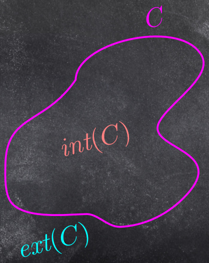


planar ? NÃO!!

Luís Felipe
23/11/22

# Curva de Jordan

**Teorema da Curva de Jordan.**
A curva $C$ particiona o plano em duas regiões arco-conexas: $int(C)$ e $ext(C)$. Se um ponto está em $int(C)$ e outro está em $ext(C)$, então a semirreta que os une tem interseção com $C$.



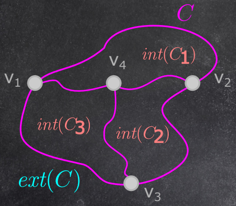
Luís Felipe
23/11/22

**Teorema.** O grafo completo $K_5$ não é planar.

**Prova:** Suponha que $K_5$ possua uma representação plana. Considere $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Como $G$ é completo, cada par de vértices é vizinho. Seja $C = v_1 v_2 v_3 v_1$ uma curva de Jordan no plano. Assim, $v_4$ é representado ou em $int(C)$ ou em $ext(C)$. Vamos considerar $v_4 \in int(C)$ (o caso $v_4 \in ext(C)$ é tratado similarmente).

Com isso, as arestas $v_4 v_1$, $v_4 v_2$ e $v_4 v_3$ dividem $int(C)$ em três regiões: $int(C_1) = v_1 v_4 v_2 v_1$, $int(C_2) = v_2 v_4 v_3 v_2$, $int(C_3) = v_3 v_4 v_1 v_3$.




Assim, $v_5$ pertence a uma das 4 possíveis regiões. Se $v_5 \in ext(C)$, como $v_4 \in int(C)$, pelo teorema da Curva de Jordan, a aresta $v_4 v_5$ corta $C$ em algum momento. Contradição. Caso $v_5 \in int(C_i)$, $i = 1, 2, 3$ é análogo.

Luís Felipe
23/11/22

# $K_5$ não é planar

Logo, não existe representação plana para o $K_5$.

Exercício: Mostre que o $K_{3,3}$ não é planar.

Luís Felipe
23/11/22

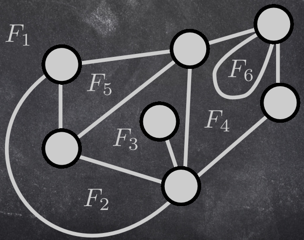
# Faces

Se um grafo $G$ é planar, então toda representação plana de $G$ divide o plano em regiões chamadas faces.

Seja $e$ uma aresta de um grafo planar. Se $e$ é uma ponte, só uma face incide em $e$. Se $e$ não é uma ponte, duas faces incidem em $e$.

Grau da face: Número de arestas (não necessariamente distintas) num passeio fechado que delimita a face. Pontes contam duas vezes.

$d(F_1) = 5$ $d(F_2) = 3$
$d(F_3) = 5$ $d(F_4) = 5$
$d(F_5) = 3$ $d(F_6) = 1$

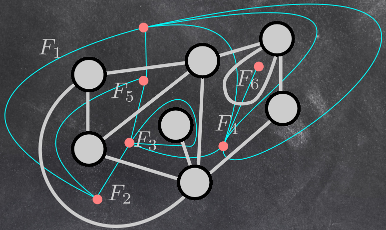


Luís Felipe
23/11/22

# Grafo dual

Dado $G$ um grafo planar, o grafo dual de $G$, $G^*$:

- cada face de $G$ é um vértice de $G^*$
- cada aresta de $G$ é associada a uma aresta de $G^*$. Dois vértices $f^*, g^*$ de $G^*$ são adjacentes sse suas faces são separadas por uma aresta de $G$.




Obs.: Cada ponte de $G$ é um laço de $G^*$, e vice e versa.
Obs.: Dado um grafo planar $G$, seu grafo dual $G^*$ é planar.
Cada aresta de $G$ (diferente de ponte) pertence a exatamente duas faces, formando, assim, aresta de $G^*$.

Luís Felipe
23/11/22

# Consequências

Algumas consequências da definição de grafo dual:

i) $n(G^*) = f(G)$, onde $f(G)$ é o número de faces de $G$.
ii) $m(G^*) = m(G)$.
iii) $d_{G^*}(f^*) = d_G(f)$, onde $d_G(f)$ é o grau da face $f$ de $G$ e $d_{G^*}(f^*)$ é o grau do vértice $f^*$ em $G^*$.

**Teorema.** Seja $G$ é um grafo planar e $F(G)$ o conjunto das faces de $G$. Temos que $\sum_{f \in F} d(f) = 2m$.

**Prova:** Seja $G^*$ o grafo dual de $G$. Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in F(G)} d(f) &= \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) && \text{, por iii)} \\ &= 2m(G^*) && \text{, pelo Teo do Aperto de Mãos} \\ &= 2m(G) && \text{, por ii)} \end{aligned}$$

Luís Felipe
23/11/22

# Relação de Euler

**Teorema.** Sejam $G$ um grafo conexo planar e sejam $n, m, f$, o número de vértices, de arestas e faces, respectivamente de uma representação plana de $G$. Então, $n - m + f = 2$.

**Prova:** Indução sobre $f$. Se $f = 1$, então não há ciclos, nem laços e nem arestas paralelas. Assim, cada aresta é uma ponte. Como $G$ é conexo, temos que $G$ é árvore. Com isso, $m = n - 1$ (visto em aulas muito antigas), e assim:
$n - m + f = n - n + 1 + 1 = 2$.

Suponha que o teorema seja verdadeiro para todos os grafos planares conexos com menos de $f$ faces.

Seja $G$ um grafo conexo planar com $f \geq 2$ faces. Escolha uma aresta $e$ de $G$ que não seja uma ponte. Assim, $G - e$ é conexo (visto em aulas muito antigas) e planar com $f - 1$ faces, pois duas faces de $G$ separadas por $e$ combinam uma face de $G - e$. Por HI, temos:
$n(G - e) - m(G - e) + f(G - e) = 2$

Luís Felipe
23/11/22

# Continuação

Além disso: $n(G-e) = n(G)$, $m(G-e) = m(G) - 1$, $f(G-e) = f(G) - 1$. Ou seja:

$$n(G-e) - m(G-e) + f(G-e) = n(G) - m(G) + 1 + f(G) - 1 = n(G) - m(G) + f(G) = 2.$$

OBS.: O número de faces é sempre o mesmo. É propriedade do grafo.

Luís Felipe
23/11/22

**Corolário.** Se $G$ é planar, simples e conexo com $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

**Prova:** Cada face é delimitada por no mínimo 3 arestas, assim $d(f) \geq 3$, para toda face $f \in F$. Com isso: $\sum_{f \in F} d(f) \geq 3f$.

Como $\sum_{f \in F} d(f) = 2m$, temos: $2m \geq 3f$. E assim, $f \leq \frac{2m}{3}$

Pela Relação de Euler:
$n - m + f = 2 \;\therefore\; n - m + \frac{2m}{3} \geq 2$

Ou seja:
$m \leq 3n - 6$

**Obs.:** $K_5$ não é planar. Se fosse, teríamos:
$m(K_5) = 10 \leq 3n(K_5) - 6 = 9$. Contradição.

Luís Felipe
23/11/22

Corolário. Se $G$ é planar, simples, conexo, sem triângulos com $n \geq 3$, então $m \leq 2n - 4$.

Prova: Cada face é delimitada por no mínimo 4 arestas, assim $d(f) \geq 4$, para toda face $f \in F$. Com isso: $\sum_{f \in F} d(f) \geq 4f$.

Como $\sum_{f \in F} d(f) = 2m$, temos: $2m \geq 4f$. E assim, $f \leq \frac{2m}{4}$

Pela Relação de Euler:
$n - m + f = 2 \ \therefore \ n - m + \frac{2m}{4} \geq 2$

Ou seja:
$m \leq 2n - 4$

Obs.: $K_{3,3}$ não é planar. Se fosse, teríamos:
$m(K_{3,3}) = 9 \leq 2n(K_{3,3}) - 4 = 8$. Contradição.

Luís Felipe
23/11/22

Corolário. Se $G$ é planar, então $\delta \leq 5$.

Prova: Se $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, resultado é trivial. Se $n \geq 5$, vimos que $m \leq 3n - 6$, e assim:

$$\delta n \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2m \leq 2(3n - 6)$$

Assim: $\delta n \leq 6n - 12 < 6n$. Com isso: $\delta n < 6n$.

Portanto, $6n - \delta n > 0$, e assim: $(6 - \delta)n > 0$.

Como $n > 0$, então $6 - \delta > 0$ e assim: $6 > \delta$, ou equivalentemente $\delta \leq 5$.