Aula 18 - Coloração de Vértices (parte II)

Luís Felipe

UFF

18 de Novembro de 2022

Luís Felipe
18/11/22

Na aula passada...

- Definimos coloração de vértices, coloração própria, grafo k-colorível, grafo k-cromático, grafo crítico.

Luís Felipe
18/11/22

Na aula passada...

- Definimos coloração de vértices, coloração própria, grafo k-colorível, grafo k-cromático, grafo crítico.
- Mostramos propriedades que relacionam o número cromático com δ e Δ.

Luís Felipe
18/11/22

Na aula passada...

- Definimos coloração de vértices, coloração própria, grafo k-colorível, grafo k-cromático, grafo crítico.
- Mostramos propriedades que relacionam o número cromático com δ e Δ.
- Mostramos que se um grafo é crítico então nenhum corte de vértices que é clique.

Luís Felipe
18/11/22

Na aula passada...

- Definimos coloração de vértices, coloração própria, grafo k-colorível, grafo k-cromático, grafo crítico.
- Mostramos propriedades que relacionam o número cromático com δ e Δ.
- Mostramos que se um grafo é crítico então nenhum corte de vértices que é clique.
  - Em particular, todo grafo crítico é um bloco.

Luís Felipe
18/11/22

Na aula passada...

- Definimos coloração de vértices, coloração própria, grafo k-colorível, grafo k-cromático, grafo crítico.
- Mostramos propriedades que relacionam o número cromático com δ e Δ.
- Mostramos que se um grafo é crítico então nenhum corte de vértices que é clique.
  - Em particular, todo grafo crítico é um bloco.
  - Relacionamos, assim, número cromático com corte de vértices.

Luís Felipe
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Luís Felipe
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

Luís Felipe
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo I: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

Luís Felipe 18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.

Luís Felipe
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.

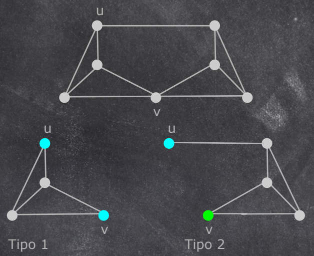
Luís Felipe 18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.



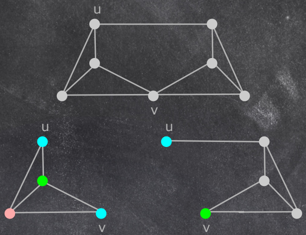
Luís Felipe

18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;
- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.



Tipo 1 Tipo 2

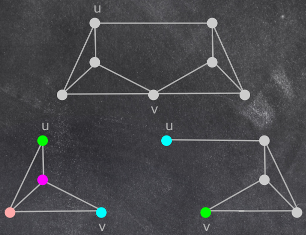
Luís Felipe
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.



Tipo 1 Tipo 2

Luís Felipe

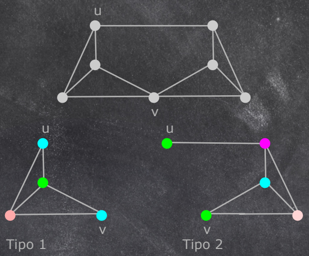
18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.



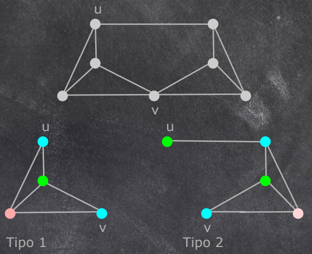
Luís Felipe 18/11/22

Dado um grafo k-crítico G, considere um corte de vértices $S = \{u, v\}$, tal que u e v não são adjacentes.

Dizemos que G_i de uma S-componente é:

- tipo 1: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui a mesma cor a u e v;

- tipo 2: Se toda $(k-1)$-coloração de G_i atribui cores diferentes a u e v.



Luís Felipe
18/[illegible]

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Luís Felipe 18/[illegible]

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv;

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível.

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração

Luís Felipe 18/11/09

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores,

Luís Felipe
18/11/09

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).

Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).
Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível, a mesma coisa sobre G_2 ser do tipo 1).

Luís Felipe
18/10/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível). Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível, a mesma coisa sobre G_2 ser do tipo 1). Como G_1 e G_2 são de tipos diferentes, $G_1 \cup G_2$ é subgrafo de G e não é $(k-1)$-colorível.

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).
Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível, a mesma coisa sobre G_2 ser do tipo 1). Como G_1 e G_2 são de tipos diferentes, $G_1 \cup G_2$ é subgrafo de G e não é $(k-1)$-colorível. Se $G_1 \cup G_2$ fosse subgrafo próprio de G então G não seria k-crítico,

Luís Felipe 18/11/09

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).

Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível, a mesma coisa sobre G_2 ser do tipo 1). Como G_1 e G_2 são de tipos diferentes, $G_1 \cup G_2$ é subgrafo de G e não é $(k-1)$-colorível. Se $G_1 \cup G_2$ fosse subgrafo próprio de G então G não seria k-crítico, pois $\chi(G_1 \cup G_2) \geq k$,

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Dirac). Seja G um grafo k-crítico com corte de vértices $\{u, v\}$, então:

i) $G = G_1 \cup G_2$, onde G_j é do tipo j.

ii) ambos $G_1 + uv$ e $G_2 \cdot uv$ são k-críticos.

Obs.: $G_1 + uv$ é o grafo obtido de G_1 adicionando a aresta uv; $G_2 \cdot uv$ é o grafo obtido de G_2 identificando os vértice u e v.

Demonstração:

i) Como G é crítico, cada $\{u, v\}$-componente de G é $(k-1)$-colorível. Assim, existem, necessariamente, duas componentes G_j e G_t que não concordam em nenhuma coloração (pois se existisse $(k-1)$-coloração para cada $\{u, v\}$-componente de modo que u e v recebessem sempre o mesmo par de cores, então G seria $(k-1)$-colorível).
Assim, existem duas componentes G_1 e G_2 tais que G_1 é do tipo 1 e G_2 é do tipo 2 (pois se G_1 fosse do tipo 2 então G_1 não seria $(k-1)$-colorível, a mesma coisa sobre G_2 ser do tipo 1). Como G_1 e G_2 são de tipos diferentes, $G_1 \cup G_2$ é subgrafo de G e não é $(k-1)$-colorível. Se $G_1 \cup G_2$ fosse subgrafo próprio de G então G não seria k-crítico, pois $\chi(G_1 \cup G_2) \geq k$, Portanto, $G = G_1 \cup G_2$.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor),

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático,

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G,

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.
- Se $e \neq uv$.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.
- Se $e \neq uv$. Em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$ (note que este é o grafo G inicial sem uma aresta e também sem uv, pois uv não pertence a G), os vértices u e v recebem cores diferentes,

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.
- Se $e \neq uv$. Em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$ (note que este é o grafo G inicial sem uma aresta e também sem uv, pois uv não pertence a G), os vértices u e v recebem cores diferentes, pois G_2 é do tipo 2 e G_2 é subgrafo de $G - e$.

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo I (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.
- Se $e \neq uv$. Em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$ (note que este é o grafo G inicial sem uma aresta e também sem uv, pois uv não pertence a G), os vértices u e v recebem cores diferentes, pois G_2 é do tipo 2 e G_2 é subgrafo de $G - e$. Assim, as cores de u e v em $G - e$ também podem ser consideradas em $H_1 - e$,

Luís Felipe
18/11/22

Continuação

ii) Seja $H_1 = G_1 + uv$. Como G_1 é do tipo 1 (ou seja, $(k-1)$-colorível e u e v recebem mesma cor), então H_1 é k-cromático, basta adicionar uma nova cor ao grafo e atribuir ou ao u ou ao v.
Para mostrar que H_1 é crítico falta mostrar que qualquer subgrafo de H_1 é $(k-1)$-colorível. Considere $H_1 - e$, para e uma aresta de H_1. Temos os casos:

- Se $e = uv$. Neste caso $H_1 - e = G_1$, que é subgrafo próprio de G, e sabemos assim, que como G é k-crítico, então G_1 é $(k-1)$-colorível.
- Se $e \neq uv$. Em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$ (note que este é o grafo G inicial sem uma aresta e também sem uv, pois uv não pertence a G), os vértices u e v recebem cores diferentes, pois G_2 é do tipo 2 e G_2 é subgrafo de $G - e$. Assim, as cores de u e v em $G - e$ também podem ser consideradas em $H_1 - e$, tendo assim, uma $(k-1)$-coloração.

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo.

Luís Felipe
18/11/24

Luís Felipe
18/11/24

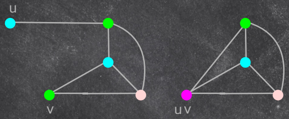
Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$.

Luís Felipe
18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.

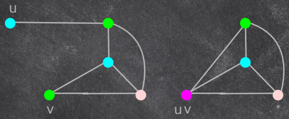
Luís Felipe
18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.



Luís Felipe 18/11/24

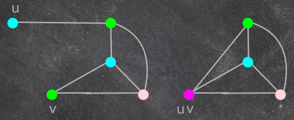
Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.



Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$.

Luís Felipe
18/11/24

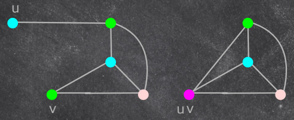
Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.



Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$. Resta mostrar que para qualquer remoção de aresta e, $H_2 - e$ é $(k-1)$-colorível.

Luís Felipe 18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.

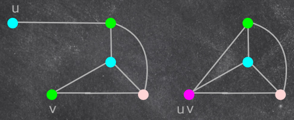


Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$. Resta mostrar que para qualquer remoção de aresta e, $H_2 - e$ é $(k-1)$-colorível.

Temos que G_1 é subgrafo de $G - e$ e como G é k-crítico,

Luís Felipe 18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.

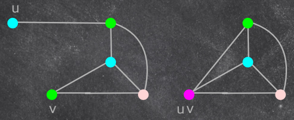


Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$. Resta mostrar que para qualquer remoção de aresta e, $H_2 - e$ é $(k-1)$-colorível.

Temos que G_1 é subgrafo de $G - e$ e como G é k-crítico, $G - e$ tem uma $(k-1)$-coloração,

Luís Felipe 18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.

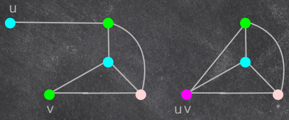


Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$. Resta mostrar que para qualquer remoção de aresta e, $H_2 - e$ é $(k-1)$-colorível.

Temos que G_1 é subgrafo de $G - e$ e como G é k-crítico, $G - e$ tem uma $(k-1)$-coloração, e como G_1 é subgrafo de $G - e$, em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$, u e v precisam ter a mesma cor.

Luís Felipe
18/11/24

Para mostrar que $G_2 \cdot uv$ é k-crítico, faça um argumento análogo. Ou seja, como $G_2 \setminus \{u, v\}$ é $(k-1)$-colorível, atribua as mesmas $(k-1)$ cores a $G_2 \setminus \{u, v\}$ e adicione uma nova cor para o vértice associado a identificação de u e v em $G_2 \cdot uv$. Como $(N_{G_2}(u) \cup N_{G_2}(v)) \subseteq G_2$ é $(k-1)$-colorível e a nova cor de $G_2 \cdot uv$ será usada somente para o vértice associado a uv, então $G_2 \cdot uv$ é k-cromático.



Seja $H_2 = G_2 \cdot uv$. Resta mostrar que para qualquer remoção de aresta e, $H_2 - e$ é $(k-1)$-colorível.

Temos que G_1 é subgrafo de $G - e$ e como G é k-crítico, $G - e$ tem uma $(k-1)$-coloração, e como G_1 é subgrafo de $G - e$, em qualquer $(k-1)$-coloração de $G - e$, u e v precisam ter a mesma cor. Então podemos usar essa mesma $(k-1)$-coloração de $G - e$ com as cores restritas aos vértices de $G_2 - e$ e identificar os vértices u e v que tem a mesma cor.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1

Luís Felipe 18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1),

Luís Felipe

18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo I e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:

$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2$

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Luís Felipe 18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Além disso, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$, pois H_2 é k-crítico, u e v são identificados em H_2 e o grau do novo vértice (da identificação de u e v) deve ser pelo menos $k - 1$.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Além disso, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$, pois H_2 é k-crítico, u e v são identificados em H_2 e o grau do novo vértice (da identificação de u e v) deve ser pelo menos $k - 1$.

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Além disso, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$, pois H_2 é k-crítico, u e v são identificados em H_2 e o grau do novo vértice (da identificação de u e v) deve ser pelo menos $k - 1$.

Como $d(u) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(u)$ e $d(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v)$, temos:

Luís Felipe
18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo 1 e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Além disso, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$, pois H_2 é k-crítico, u e v são identificados em H_2 e o grau do novo vértice (da identificação de u e v) deve ser pelo menos $k - 1$.

Como $d(u) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(u)$ e $d(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v)$, temos:
$d(u) + d(v) \geq 2k - 4 + k - 1$

Luís Felipe 18/11/22

Corolário. Seja G um grafo k-crítico com um corte de vértices $\{u, v\}$. Temos que $d(u) + d(v) \geq 3k - 5$.

Demonstração: Seja G_1 a $\{u, v\}$-componente do tipo I e G_2 a $\{u, v\}$-componente do tipo 2. Sejam $H_1 = G_1 + uv$ e $H_2 = G_2 \cdot uv$. Como H_1 e H_2 são k-críticos, então $\delta \geq k - 1$ (Aula passada). Assim, $d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geq 2k - 2$ e $d_{H_2}(w) \geq k - 1$ (sendo w o vértice identificado por u e v).

Como em G_1, os graus de u e v são os mesmos graus deles em H_1 menos 1 (pela remoção da aresta uv que existe em H_1 e não existe em G_1), temos que:
$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geq 2k - 2 - 2 = 2k - 4$.

Além disso, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq k - 1$, pois H_2 é k-crítico, u e v são identificados em H_2 e o grau do novo vértice (da identificação de u e v) deve ser pelo menos $k - 1$.

Como $d(u) = d_{G_1}(u) + d_{G_2}(u)$ e $d(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v)$, temos:
$d(u) + d(v) \geq 2k - 4 + k - 1 = 3k - 5$.

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário:

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático.

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H.

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada).

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$,

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).

Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:
$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5$

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).

Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:
$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$.

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:
$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$. Portanto, $k \leq \Delta$,

Luís Felipe 18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:
$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$. Portanto, $k \leq \Delta$, pois:
$2\Delta \geq 2k - 1$

Luís Felipe
18/11/22

Teorema (Brooks). Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e não é um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que G seja k-crítico (Caso contrário: Se G não fosse crítico, então G possuiria subgrafo H também k-cromático. Se H é crítico, como H possui mesmo número cromático de G, então é suficiente analisar em H. Caso contrário, faça a mesma análise em algum subgrafo de H, e assim sucessivamente).
Assim, G é um bloco (visto aula passada). Analisemos os seguintes casos:

- $k = 1$, G é completo (não considerado)
- $k = 2$, G é bipartido, $\Delta \geq 2$
- $k = 3$, G é ciclo ímpar (vimos aula passada)
- $k \geq 4$, ...

Se G tem um corte de vértices $\{u, v\}$, temos que:
$2\Delta \geq d(u) + d(v) \geq 3k - 5 \geq 2k - 1$. Portanto, $k \leq \Delta$, pois:
$2\Delta \geq 2k - 1 \therefore \Delta \geq k - \frac{1}{2}$. Note que Δ tem que ser inteiro, dessa forma: $\Delta \geq k$.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$,

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w. Na hora de colorir v_i, para $3 \leq i \leq n-1$,

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w. Na hora de colorir v_i, para $3 \leq i \leq n-1$, no máximo $\Delta - 1$ vizinhos dele já foram coloridos.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum $v_j, j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w. Na hora de colorir v_i, para $3 \leq i \leq n-1$, no máximo $\Delta - 1$ vizinhos dele já foram coloridos. Então, existe uma das Δ cores que pode ser atribuída a v_i.

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w. Na hora de colorir v_i, para $3 \leq i \leq n-1$, no máximo $\Delta - 1$ vizinhos dele já foram coloridos. Então, existe uma das Δ cores que pode ser atribuída a v_i.

Na hora de colorir v, os seus vizinhos usaram no máximo $\Delta - 1$ cores, pois u e w receberam a cor 1,

Luís Felipe
18/11/22

Se G não tem um corte de vértices $\{u, v\}$, então considere G 3-conexo. Observe que existe $P_3 = u, v, w$ induzido em G (pois G não é um completo).

Ordene $V(G)$ por $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n$ de modo que $v_1 = u$, $v_2 = w$, $v_n = v$, e cada vértice v_i seja adjacente a algum v_j, $j > i$.

Atribua a cor 1 a u e w. Na hora de colorir v_i, para $3 \leq i \leq n-1$, no máximo $\Delta - 1$ vizinhos dele já foram coloridos. Então, existe uma das Δ cores que pode ser atribuída a v_i.

Na hora de colorir v, os seus vizinhos usaram no máximo $\Delta - 1$ cores, pois u e w receberam a cor 1, então podemos colorir com uma das Δ cores.