Aula 17 - Coloração de Vértices

Luís Felipe

UFF

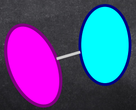
16 de Novembro de 2022

Luís Felipe
16/11/22

Coloração de Vértices - definições

- Uma *k*-coloração é uma atribuição de cores aos vértices do grafo usando k cores distintas.
- Uma coloração é própria quando vértices adjacentes recebem cores distintas.
- Um grafo é *k*-colorível se admite uma k-coloração própria.
- Um grafo é *k*-cromático se k é o menor inteiro para o qual o grafo é k-colorível.
  - Se G é k-cromático, então o número cromático de G, denotado por $\chi(G) = k$.

Se G é bipartido, então qual o valor de $\chi(G)$?



$\chi(G) = 2$

Luís Felipe
16/11/22

Definições - continuação

- Um grafo G é crítico se $\chi(H) < \chi(G)$ para todo subgrafo próprio H de G.
- Um grafo é k-crítico quando é crítico e k-cromático.

? Existe algum grafo conexo 2-crítico?

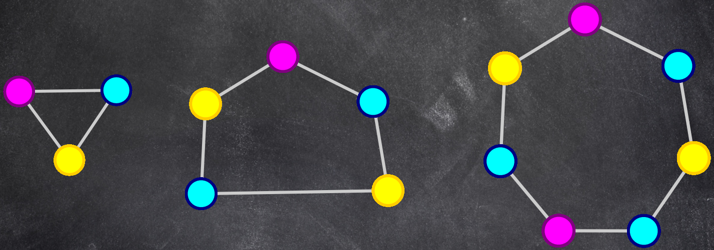
SIM!!

Apenas um!

Luís Felipe
16/11/22

Grafos k-críticos

Quais grafos conexos são 3-críticos?



ciclos ímpares

Luís Felipe
16/11/22

Teorema. Se G é k-crítico, então $\delta \geq k - 1$.

- **Prova:** Suponha, por absurdo, que G possua um vértice v com menos do que $k - 1$ vizinhos. Seja $H = G - v$. Como G é k-crítico, então H é $(k - 1)$-colorível.

  Como $N_G(v) \subseteq H$ e $|N(v)| < k - 1$, existe uma das $k - 1$ cores não atribuídas a nenhum vizinho de v. Então v pode receber tal cor e obtemos uma $k - 1$-coloração para G. Absurdo. Logo, $\delta \geq k - 1$.

Luís Felipe
16/11/22

Corolário. Todo grafo k-cromático tem pelo menos k vértices de grau pelo menos $k-1$.

- Prova: Como G é k-cromático, então $|V(G)| \geq k$. Assim, pelo teorema anterior (Obs.: Note que todo grafo k-cromático possui um subgrafo que é k-crítico), $\delta \geq k-1$. Assim, cada vértice tem grau pelo menos $k-1$.

Luís Felipe
16/11/22

Corolário. Para todo grafo $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

- **Prova 1:** Ordene os vértices. Atribua as cores da esquerda para a direita. Note que sempre é possível atribuir uma das $\Delta + 1$ cores, pois os vizinhos de um vértices usam, no máximo, Δ cores distintas.

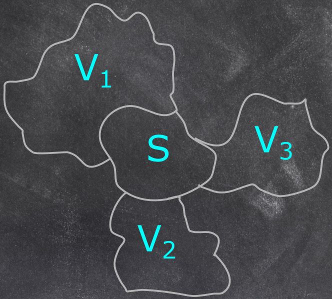
  Obs.: uma prova alternativa é por contradição, a seguir:

- **Prova 2:** Assuma que G não seja $(\Delta + 1)$-colorível, então G é pelo menos $(\Delta + 2)$-cromático, o que implica, pelo Corolário anterior, na existência de um vértice de grau pelo menos $\Delta + 1$, uma contradição.

Luís Felipe
16/11/22

Relembre que um corte de vértices S é $S \subseteq V$ tal que $G \setminus S$ é um grafo tal que $w(G \setminus G) > w(G)$.

Seja S um corte de vértice de G. As S-componentes de G são os subgrafos $G_i = G[V_i \cup S]$.



Luís Felipe
16/11/22

Teorema. Se G é um grafo crítico, nenhum corte de vértices é uma clique.

Prova: Suponha, por contradição, que G seja k-crítico E possui um corte de vértices S que é uma clique.

Denote por $G_i = G[V_i \cup S]$, $1 \leq i \leq p$, as S-componentes de G.

Cada G_i é $(k-1)$-colorível, e $|S| \leq k-1$, caso contrário, G_i seria pelo menos k-colorível.

Como cada G_i é $(k-1)$-colorível, G também é $(k-1)$-colorível, dado que S está contido em todas as possíveis p S-componentes de G. Obtemos assim, uma contradição.

Luís Felipe
16/11/22

Lembre que um bloco é um subgrafo 2-conexo, ou seja, não existe um corte de vértices de tamanho 1.

Corolário: Todo grafo crítico é um bloco.

Prova: Uma articulação é um corte de vértices que é uma clique. Logo, pelo teorema anterior, não existe corte de vértices que seja uma clique. Implicando, assim, que não existe corte de vértices de tamanho 1.