Aula 16 - Teoria de Ramsey

Luís Felipe

UFF

11 de Novembro de 2022

Luís Felipe
11/11/22

Ramsey

Ramsey: Para todo par de inteiros positivos k e ℓ, existe um menor inteiro $r(k,\ell)$ tal que todo grafo com $r(k,\ell)$ vértices tem uma clique com k vértices OU tem um conjunto independente com ℓ vértices.

Obs.: Note que é de se esperar que um grafo que não possua cliques de tamanhos grandes, possua conjuntos independentes de tamanhos grandes.

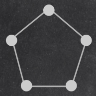
Números de Ramsey: $r(k,\ell)$

Luís Felipe
11/11/22

Exemplo

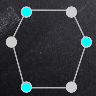
Exemplo: Quantas pessoas existem numa festa de modo que existem 3 pessoas que se conhecem mutualmente ou 3 pessoas que não se conhecem mutualmente?

Podemos listar os grafos que satisfazem:
- vértices são pessoas;
- arestas são conhecimento de duas pessoas.



C_5 não possui clique de tamanho 3 e nem conjunto independente de tamanho 3. Ou seja, 5 não é resposta.

Considerando $n = 6$:



C_6 possui conjunto independente de tamanho 3.

Luís Felipe
11/11/22

$r(3,3)$

Como C_6 satisfaz o que queremos então $n = 6$ responde a pergunta? Não necessariamente!!!

Devemos verificar se há clique de tamanho 3 ou conjunto independente de tamanho 3 para todos os grafos com $n = 6$.

Isso é possível ser feito, e assim: $r(3,3) = 6$.

Analisando como são os grafos com $n = 6$:

- grafos desconexos: há ao menos um vértice de cada componente conexa em um conjunto independente. Se houver pelo menos 3 componentes conexas, então temos o que queremos. Se houver 2 componentes conexas, então uma das componentes possui pelo menos 3 vértices, donde ou três vértices formam uma clique ou há um par de vértices não vizinhos. Este par somado ao vértice da outra componente conexa formam um conjunto independente de tamanho 3.
- grafos conexos: (continua...)

Luís Felipe
11/11/22

$r(3,3)$

- Grafos conexos: se há cliques de tamanho 3, então temos o que queremos. Se não houver cliques de tamanho 3, então o tamanho da maior clique é 2. Considerando esse caso, tome um vértice u. Se u for vizinho a pelo menos 3 vértices, 3 desses vértices formam um conjunto independente (caso contrário haveria um triângulo com u e dois de seus vizinhos). Se não houver vértice de grau pelo menos 3, então cada vértice possui grau igual a 2 ou 1. Como G é conexo, então G é um C_6 ou um P_6. Em cada caso, G possui um conjunto independente de tamanho 3.

Com essa análise, temos que todos os grafos com $n = 6$ possuem uma clique de tamanho 3 ou um conjunto independente de tamanho 3.

Com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ há exemplos que não satisfazem. A saber: $n \in \{1, 2\}$ não possuem vértices suficientes; $n = 3$, P_3; $n = 4$, C_4; $n = 5$, C_5. Portanto: $r(3,3) = 6$.

Luís Felipe
11/11/22

$r(k, \ell)$

$r(k, \ell)$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	9	14	18
4	1	4	9	18	25	?
5	1	5	14	25	?	?
6	1	6	18	?	?	?

Algumas consequências da definição:

- $r(1, \ell) = 1$. Todo grafo com pelo menos 1 vértice possui uma clique de tamanho 1.
- $r(k, 1) = 1$. Todo grafo com pelo menos 1 vértice possui um conjunto independente de tamanho 1.
- $r(2, \ell) = \ell$. Por que?

Luís Felipe
11/11/22

$r(2,\ell)$ e $r(k,2)$

- $r(2,\ell)$: Com menos de ℓ vértices temos contra-exemplos: Se G tem menos do que ℓ vértices, então G não possui um conjunto independente de tamanho ℓ. Ainda com menos de ℓ vértices, o grafo nulo não possui clique de tamanho 2. Assim, $r(2,\ell) \geq \ell$.

  Qualquer grafo diferente do grafo nulo possui clique de tamanho 2 e o grafo nulo com ℓ vértices possui conjunto independente de tamanho ℓ. Assim, $r(2,\ell) = \ell$.

- $r(k,2)$: Similar ao $r(2,\ell)$. Não há grafos com menos de k vértices com cliques de tamanho k; grafo completo com menos de k vértices não possui conjunto independente de tamanho 2; grafos com k vértices satisfazem o exigido, tal como o caso anterior.

Luís Felipe
11/11/22

Propriedade simétrica

$r(k, \ell) = r(\ell, k)$.

- Todo grafo G com $r(k, \ell)$ vértices possui clique de tamanho k (ou conjunto independente de tamanho ℓ), assim $\overline{G}$ possui conjunto independente de tamanho k (ou clique de tamanho ℓ).

Luís Felipe
11/11/22

Monotonicidade

$r(k+1, \ell) \geq r(k, \ell)$.

- Todo grafo com clique de tamanho $k+1$ ou independente de tamanho ℓ também possui clique de tamanho k ou independente de tamanho ℓ.

Luís Felipe
11/11/22

Limite inferior

$r(k, \ell) \geq \min\{k, \ell\}.$

- Todo grafo com $r(k, \ell)$ vértices possui uma clique de tamanho k ou um independente de tamanho ℓ. Ou seja, há pelo menos o mínimo dentre k e ℓ.

Luís Felipe
11/11/22

Limite superior

Teorema: Para $k \geq 2$ e $\ell \geq 2$: $r(k,\ell) \leq r(k,\ell-1) + r(k-1,\ell)$.

Demonstração: Seja G um grafo com $r(k,\ell-1) + r(k-1,\ell)$ vértices. Considere $v \in V$ e distingua dois possíveis casos:

- Caso i) v é não adjacente a um conjunto S com $|S| \geq r(k,\ell-1)$.
- Caso ii) v é adjacente a um conjunto T com $|T| \geq r(k-1,\ell)$.

Vamos argumentar que o Caso i) ou Caso ii) ocorre.
Suponha que Caso i) ou Caso ii) seja negada.
Ou seja, não ocorre Caso i) e não ocorre Caso ii), então:
$|S| \leq r(k,\ell-1) - 1$ e $|T| \leq r(k-1,\ell) - 1$.
Obs.: v não ser adjacente a S em G significa v ser adjacente a S em $\overline{G}$. Daí temos $|S| = |\overline{N(v)}|$.
Assim:
$|\overline{N(v)}|+|N(v)| \leq r(k,\ell-1)-1+r(k-1,\ell)-1 = r(k,\ell-1)+r(k-1,\ell)-2.$

Luís Felipe
11/11/22

Continuação

Assim, $|\overline{N(v)}| + |N(v)| \leq r(k, \ell - 1) + r(k - 1, \ell) - 2$.

Note porém, que:

- $V \setminus \{v\} = \overline{N(v)} \cup N(v)$, e
- $|V \setminus \{v\}| = |\overline{N(v)}| + |N(v)| = r(k, \ell - 1) + r(k - 1, \ell) - 1$.

Contradição termos assumido não ocorrer Caso i) e não ocorrer Caso ii).

Retornando aos casos i) ou ii), temos:

- No caso i), $G[S]$ contém clique de tamanho k ou independente de tamanho $\ell - 1$. Logo, $G[S \cup v]$ tem uma clique de tamanho k ou independente de tamanho ℓ.
- No caso ii), $G[T]$ contém clique de tamanho $k - 1$ ou independente de tamanho ℓ. Logo, $G[T \cup v]$ tem uma clique de tamanho k ou independente de tamanho ℓ.

Portanto, $r(k, \ell) \leq r(k, \ell - 1) + r(k - 1, \ell)$.

Luís Felipe
11/11/22

Consequência

Teorema: $r(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$.
Ideia da demonstração: Mostre por indução em $k+\ell$.
Verifique que o resultado vale para todos valores $k+\ell \leq 5$.
Assuma que o resultado vale para todos os valores de k e ℓ tais que $5 \leq k+\ell < m+n$.
Temos o teorema anterior, temos:
$r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n)$. Pela H.I., temos:

$$r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n) \leq \underbrace{\binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}}_{\text{Relação de Stifel (Triângulo de Pascal)}}.$$

Portanto, $r(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$.

Luís Felipe
11/11/22

Limite inferior

Teorema: $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$, $k \geq 2$.
Demonstração: Como $r(2,2) = 2$, assuma $k \geq 3$. Além disso, sejam os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{G}_n$: conjunto dos grafos (simples) no conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.
- $\mathcal{G}_n^k$: subconjunto do conjunto $\mathcal{G}_n$ contendo os grafos que possuem uma clique de tamanho k.

$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Ou seja, pelo Princípio Multiplicativo (PM), para cada par de vértices ou temos uma aresta ou não temos uma aresta. Assim, $2^{\binom{n}{2}}$ é o número de grafos com n vértices.

O número de grafos de $\mathcal{G}_n$ contendo uma clique de tamanho k particular é: $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$. Ou seja, as possibilidades na contagem de aresta ou não só são contabilizadas em $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ pares, dado que $\binom{k}{2}$ pares são fixados como uma clique de tamanho k.

Luís Felipe 11/11/22

Como temos $\binom{n}{k}$ subconjuntos distintos com k vértices escolhidos dentre $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, obtemos pelo PM:

$$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}.$$

Logo, dividindo a desigualdade por $|\mathcal{G}_n|$, temos:

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{|\mathcal{G}_n|} = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Assim:

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \frac{n! 2^{-\binom{k}{2}}}{(n-k)!k!} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}.$$

Queremos estabelecer que $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$. Suponha que $n < 2^{\frac{k}{2}}$.

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{(2^{\frac{k^2}{2}}) 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k^2}{2} - \frac{k^2 - k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2} \quad (k \geq 3)$$

Conclusão: Menos da metade dos grafos em $\mathcal{G}_n$ tem clique de tamanho k. Como G e $\overline{G}$ pertencem a $\mathcal{G}_n$, menos da metade desses grafos tem um independente de tamanho k. Logo, algum grafo de $\mathcal{G}_n$ não tem clique de tamanho k e nem independente de tamanho k. Assim: $r(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.