# Aula 15 - Conjuntos Independentes e Cliques

Luís Felipe

UFF

09 de Novembro de 2022

Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo
- $\beta$: cardinalidade da cobertura mínima de arestas por vértices.

Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo
- $\beta$: cardinalidade da cobertura mínima de arestas por vértices.

Já vimos que (Aula 12):

Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo
- $\beta$: cardinalidade da cobertura mínima de arestas por vértices.

Já vimos que (Aula 12):

- $\alpha' \leq \beta$

Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo
- $\beta$: cardinalidade da cobertura mínima de arestas por vértices.

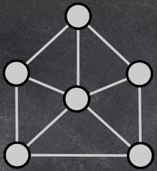
Já vimos que (Aula 12):

- $\alpha' \leq \beta$
- Para grafos bipartidos: $\alpha' = \beta$ (Teorema de König)

Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

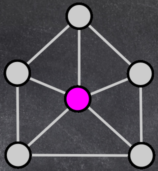
- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:



Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

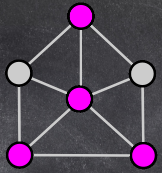
- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:



Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:



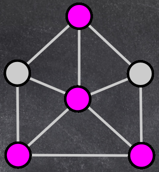
Luís Felipe

09/11/22

# Relembrando...

- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:

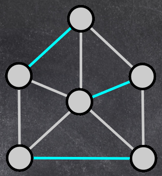
$$\beta = 4$$



Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:

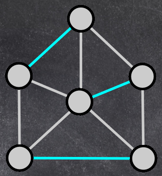


Luís Felipe
09/11/22

# Relembrando...

- Em geral, a igualdade não precisa ser válida:

$$\alpha' = 3$$



Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.

Luís Felipe


# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

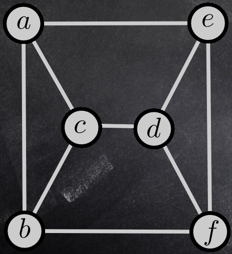
- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.
- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.

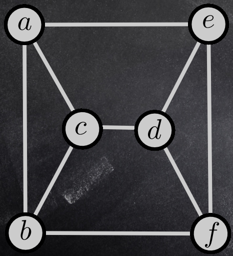


Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.



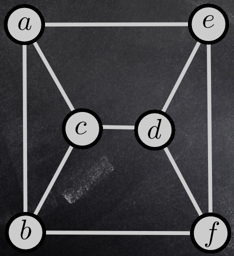

$S_1 = \{a, f\}$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.

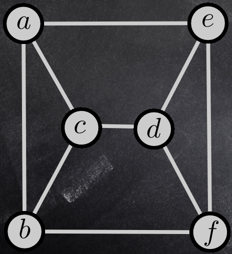



$$S_1 = \{a, f\}$$
$$S_2 = \{a, d\}$$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.
- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.



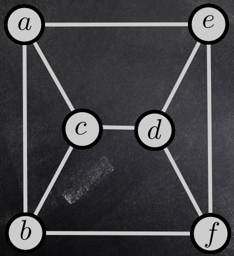

$S_1 = \{a, f\}$
$S_2 = \{a, d\}$
$\alpha = 2$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - ▶ $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - ▶ $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.



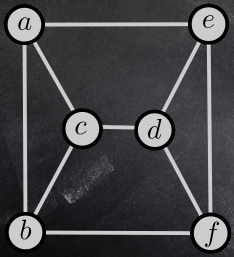

$S_1 = \{a, f\}$
$S_2 = \{a, d\}$
$\alpha = 2$ ?

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.




$S_1 = \{a, f\}$
$S_2 = \{a, d\}$
$\alpha = 2$

?

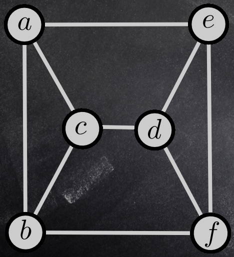
$\overline{G}$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjuntos Independentes e Cliques

- $S \subseteq V$ é um conjunto independente (de vértices) se não existe aresta entre vértices de $S$.
  - $\alpha$: cardinalidade do conjunto independente máximo.

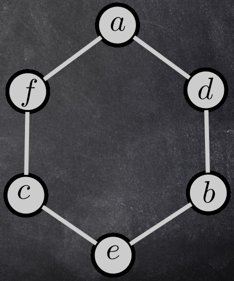
- $K \subseteq V$ é uma clique se os vértices de $K$ são dois a dois adjacentes.
  - $\omega(G)$: cardinalidade da clique máxima.




$S_1 = \{a, f\}$
$S_2 = \{a, d\}$
$\alpha = 2$

?

$\overline{G}$



Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices × Conjunto Independente

**Teorema:** $S \subseteq V$ é conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices $\times$ Conjunto Independente

Teorema: $S \subseteq V$ é conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.

- Prova: $S$ é conjunto independente $\leftrightarrow$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices $\times$ Conjunto Independente

Teorema: $S \subseteq V$ é conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.

- Prova: $S$ é conjunto independente $\leftrightarrow$ não existe aresta entre quaisquer dois vértices de $S$ $\leftrightarrow$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices $\times$ Conjunto Independente

**Teorema:** $S \subseteq V$ é conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.

- **Prova:** $S$ é conjunto independente $\leftrightarrow$ não existe aresta entre quaisquer dois vértices de $S$ $\leftrightarrow$ toda aresta de $G$ tem extremo em $V \setminus S$ $\leftrightarrow$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices $\times$ Conjunto Independente

**Teorema:** $S \subseteq V$ é conjunto independente se, e somente se, $V \setminus S$ é uma cobertura por vértices.

- **Prova:** $S$ é conjunto independente $\leftrightarrow$ não existe aresta entre quaisquer dois vértices de $S$ $\leftrightarrow$ toda aresta de $G$ tem extremo em $V \setminus S$ $\leftrightarrow$ $V \setminus S$ é cobertura das arestas por vértices.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

- Prova: Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

- Prova: Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices. Pelo teorema anterior, $V \setminus S = L^*$ é cobertura por vértices e $V \setminus L = S^*$ é conjunto independente.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

- Prova: Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices.
  Pelo teorema anterior, $V \setminus S = L^*$ é cobertura por vértices e $V \setminus L = S^*$ é conjunto independente.

$$|L^*| = n - \alpha = |V \setminus S| \geq \beta$$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

- Prova: Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices.
  Pelo teorema anterior, $V \setminus S = L^*$ é cobertura por vértices e $V \setminus L = S^*$ é conjunto independente.

$$|L^*| = n - \alpha = |V \setminus S| \geq \beta$$

$$|S^*| = n - \beta = |V \setminus L| \leq \alpha$$

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

Corolário. $\alpha + \beta = n$

- Prova: Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices.
  Pelo teorema anterior, $V \setminus S = L^*$ é cobertura por vértices e $V \setminus L = S^*$ é conjunto independente.

$$|L^*| = n - \alpha = |V \setminus S| \geq \beta$$

$$|S^*| = n - \beta = |V \setminus L| \leq \alpha$$

Logo, $n - \alpha \geq \beta$, i.e., $n \geq \alpha + \beta$ e $n - \beta \leq \alpha$, i.e., $n \leq \alpha + \beta$.

Luís Felipe
09/11/22

# Conjunto Independente $\times$ Cobertura por vértices

**Corolário.** $\alpha + \beta = n$

- **Prova:** Seja $S$ um conjunto independente máximo e $L$ uma cobertura mínima das arestas por vértices.
  Pelo teorema anterior, $V \setminus S = L^*$ é cobertura por vértices e $V \setminus L = S^*$ é conjunto independente.

$$|L^*| = n - \alpha = |V \setminus S| \geq \beta$$

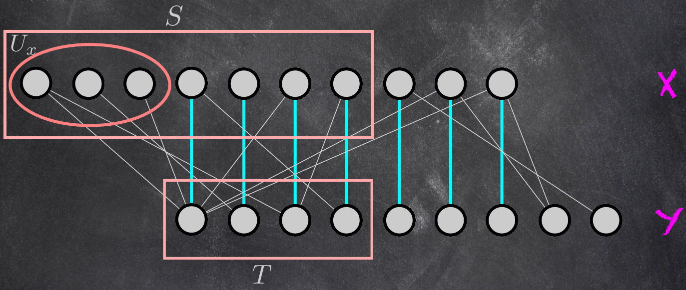
$$|S^*| = n - \beta = |V \setminus L| \leq \alpha$$

Logo, $n - \alpha \geq \beta$, i.e., $n \geq \alpha + \beta$ e $n - \beta \leq \alpha$, i.e., $n \leq \alpha + \beta$.
Portanto, $n = \alpha + \beta$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices × Conjunto Independente

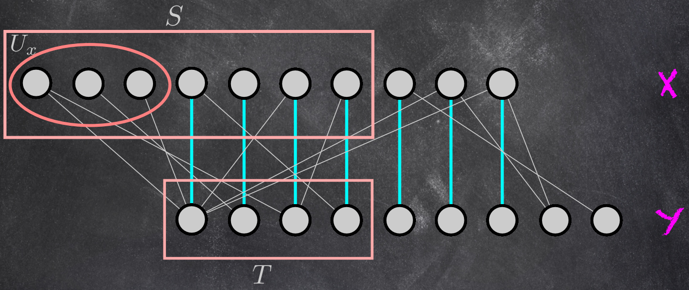
Voltemos ao grafo da prova do Teorema de König.



Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices $\times$ Conjunto Independente

Voltemos ao grafo da prova do Teorema de König.

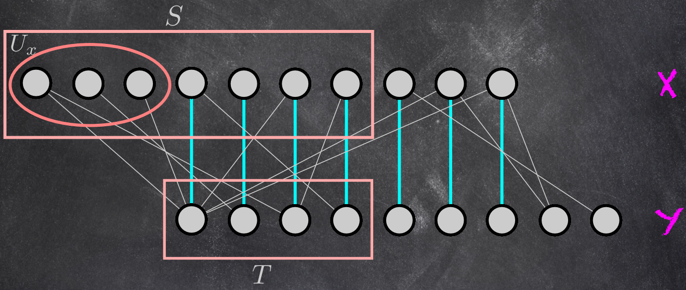



$|X| = 10, |Y| = 9, n = 19$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices × Conjunto Independente

Voltemos ao grafo da prova do Teorema de König.

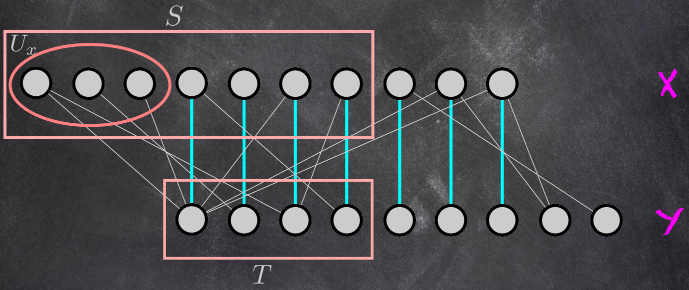



$|X| = 10, |Y| = 9, n = 19$
$\beta = 7 = \alpha'$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por vértices × Conjunto Independente

Voltemos ao grafo da prova do Teorema de König.




$|X| = 10, |Y| = 9, n = 19$
$\beta = 7 = \alpha'$
$\alpha = n - \beta = 12 > 10 = |X|$

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por arestas

- Uma cobertura dos vértices por arestas $L'$ é um conjunto de arestas tal que todo vértice é extremo de, pelo menos, uma aresta em $L'$.

Luís Felipe
09/11/22

# Cobertura por arestas

- Uma cobertura dos vértices por arestas $L'$ é um conjunto de arestas tal que todo vértice é extremo de, pelo menos, uma aresta em $L'$.
  - ▶ $\beta'$: cardinalidade da cobertura mínima dos vértices por arestas.

Luís Felipe


# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

- Só existe cobertura dos vértices por arestas se $\delta > 0$.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

- Só existe cobertura dos vértices por arestas se $\delta > 0$.
- Nem sempre $E \setminus M$ é cobertura dos vértice por arestas, para $M$ emparelhamento.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

- Só existe cobertura dos vértices por arestas se $\delta > 0$.
- Nem sempre $E \setminus M$ é cobertura dos vértice por arestas, para $M$ emparelhamento.
- Nem sempre $E \setminus L'$ é emparelhamento, para $L'$ uma cobertura dos vértice por arestas.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

- Só existe cobertura dos vértices por arestas se $\delta > 0$.
- Nem sempre $E \setminus M$ é cobertura dos vértice por arestas, para $M$ emparelhamento.
- Nem sempre $E \setminus L'$ é emparelhamento, para $L'$ uma cobertura dos vértice por arestas.

Mesmo assim, dados:

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo.
- $\beta'$: cardinalidade da cobertura dos vértice por arestas mínimo.

Teorema. Se $\delta > 0$, então $\alpha' + \beta' = n$.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

- Só existe cobertura dos vértices por arestas se $\delta > 0$.
- Nem sempre $E \setminus M$ é cobertura dos vértice por arestas, para $M$ emparelhamento.
- Nem sempre $E \setminus L'$ é emparelhamento, para $L'$ uma cobertura dos vértice por arestas.

Mesmo assim, dados:

- $\alpha'$: cardinalidade do emparelhamento máximo.
- $\beta'$: cardinalidade da cobertura dos vértice por arestas mínimo.

Teorema. Se $\delta > 0$, então $\alpha' + \beta' = n$.

- Ideia da prova: Dois casos: $\alpha' + \beta' \leq n$ e $\alpha' + \beta' \geq n$.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 1)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Portanto, $M \cup E'$ é uma cobertura de vértices por arestas de $G$

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Portanto, $M \cup E'$ é uma cobertura de vértices por arestas de $G$ (os vértices são cobertos por arestas de $M$ e de $E'$), e assim:

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Portanto, $M \cup E'$ é uma cobertura de vértices por arestas de $G$ (os vértices são cobertos por arestas de $M$ e de $E'$), e assim:

$$\beta' \leq |M \cup E'|$$

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Portanto, $M \cup E'$ é uma cobertura de vértices por arestas de $G$ (os vértices são cobertos por arestas de $M$ e de $E'$), e assim:

$$\beta' \leq |M \cup E'| = |M| + |E'| =$$

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso I)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \leq n$
Sejam $M$ um emparelhamento máximo de $G$ e $U$ o conjunto de vértices $M$-insaturados.

Como $\delta > 0$ e $M$ é máximo, existe um subconjunto de arestas $E'$ com $|U|$ arestas, um incidente a cada vértice de $U$ (caso contrário, existiria ao menos uma aresta com ambos extremos em $U$, podendo assim, aumentar $M$).

Portanto, $M \cup E'$ é uma cobertura de vértices por arestas de $G$ (os vértices são cobertos por arestas de $M$ e de $E'$), e assim:

$$\beta' \leq |M \cup E'| = |M| + |E'| = \alpha' + \underbrace{(n - 2\alpha')}_{M \text{ possui } 2\alpha' \text{ vértices}} = n - \alpha'$$

Ou seja, $\alpha' + \beta' \leq n$.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim,

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim, $|L \setminus M|$ possui pelo menos uma aresta pra cada vértice insaturado.

Luís Felipe

09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim, $|L \setminus M|$ possui pelo menos uma aresta pra cada vértice insaturado.

Além disso, $U$ são os vértices não emparelhados e há $2M$ vértices $M$-emparelhados.

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim, $|L \setminus M|$ possui pelo menos uma aresta pra cada vértice insaturado.

Além disso, $U$ são os vértices não emparelhados e há $2M$ vértices $M$-emparelhados. Assim:

$$|L| - |M| = |L \setminus M| \geq |U| = n - 2|M|$$

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$. Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim, $|L \setminus M|$ possui pelo menos uma aresta pra cada vértice insaturado.

Além disso, $U$ são os vértices não emparelhados e há $2M$ vértices $M$-emparelhados. Assim:

$$|L| - |M| = |L \setminus M| \geq |U| = n - 2|M| \therefore |L| - |M| \geq n - 2|M|$$

Luís Felipe
09/11/22

# Prova (Caso 2)

Vamos mostrar que $\alpha' + \beta' \geq n$
Sejam $L$ uma menor cobertura de vértices por arestas de $G$ (ou seja, $|L| = \beta'$) e $H = G[L]$ ($H$ é o grafo cujos vértices é o conjunto $V(G)$ e arestas é o conjunto $L$).

Considere, ainda, $M$ um emparelhamento máximo de $H$.
Denote $U$ o conjunto dos vértices $M$-insaturados de $H$.

Como $M$ é máximo, $H[U]$ não possui arestas (similar ao caso 1, caso contrário, poderíamos aumentar $M$), e assim, $|L \setminus M|$ possui pelo menos uma aresta pra cada vértice insaturado.

Além disso, $U$ são os vértices não emparelhados e há $2M$ vértices $M$-emparelhados. Assim:

$$|L|-|M| = |L \setminus M| \geq |U| = n-2|M| \therefore |L|-|M| \geq n-2|M| \therefore |M|+|L| \geq n$$

$M$ é emparelhamento de $G$, assim: $\alpha' + \beta' \geq |M| + |L| \geq n$.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

**Teorema.** Se $G$ é um grafo bipartido com $\delta > 0$, então $\alpha = \beta'$.

Luís Felipe
09/11/22

# Emparelhamento $\times$ Cobertura por arestas

**Teorema.** Se $G$ é um grafo bipartido com $\delta > 0$, então $\alpha = \beta'$.

- **Prova:** $\alpha + \beta = n$ e se $\delta > 0$, $\alpha' + \beta' = n$. Mas, pelo Teorema de König, $\alpha' = \beta$. Logo, $\alpha = \beta'$.