Aula 13 - Coloração de Arestas

Luís Felipe

UFF

14 de Outubro de 2022

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às arestas de G.

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às arestas de G.

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma função

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às arestas de G.

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma função

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}: & E & \to & \{1, 2, 3, \ldots, k\} \\ & e & \mapsto & \mathcal{C}(e) \end{array}$$

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às arestas de G.

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma função

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}: & E & \to & \{1, 2, 3, \dots, k\} \\ & e & \mapsto & \mathcal{C}(e) \end{array}$$

Uma k-coloração é própria se as arestas adjacentes recebem cores diferentes.

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de k cores às arestas de G.

Uma k-coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma função

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}: & E & \rightarrow & \{1, 2, 3, \ldots, k\} \\ & e & \mapsto & \mathcal{C}(e) \end{array}$$

Uma k-coloração é própria se as arestas adjacentes recebem cores diferentes.

$\chi'(G) =$ índice cromático de G, i.e., é o menor k tal que G admite uma k-coloração própria.

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

4-coloração
própria

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

3-coloração

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

3-coloração

não própria

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

2-coloração própria

Luís Felipe

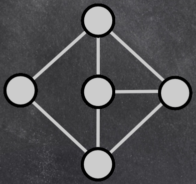
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



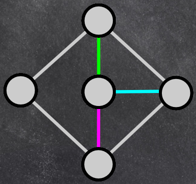
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



Luís Felipe

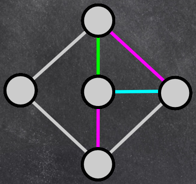
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



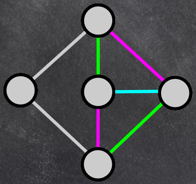
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



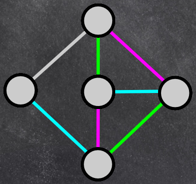
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



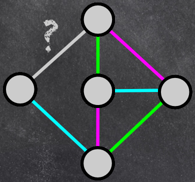
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



Luís Felipe

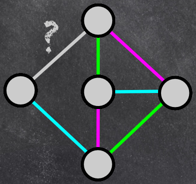
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



3-coloração

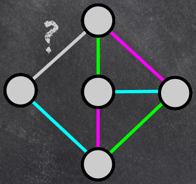
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



3-coloração ?

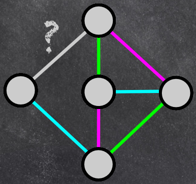
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

$3 \leq \chi' \leq 7$



3-coloração ?

NÃO!!

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração é uma partição $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$ de E onde E_i é o conjunto de arestas de cor i, $i = 1, \ldots, k$.

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Uma k-coloração é uma partição $(E_1, E_2, \ldots, E_k)$ de E onde E_i é o conjunto de arestas de cor i, $i = 1, \ldots, k$.

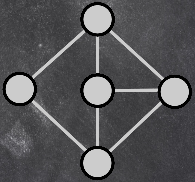
Uma k-coloração própria particiona E em emparelhamentos, cada cor i define um emparelhamento.

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

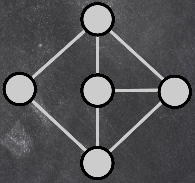


Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$



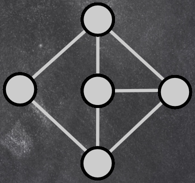
Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.



Luís Felipe

14/10/22

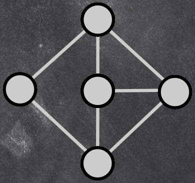
Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.

Como provar?



Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

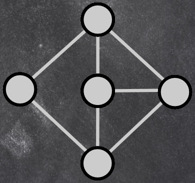
Exemplo:

$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.

Como provar?

$n = 5, \ m = 7$



Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

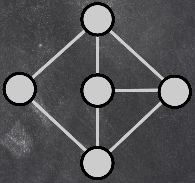
$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.

Como provar?

$n = 5, \; m = 7$

$\alpha' \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2$



Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas

Exemplo:

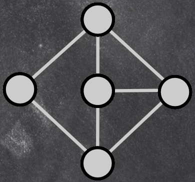
$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.

Como provar?

$n = 5, \ m = 7$

$\alpha' \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2$



$3 \times 2 = 6 \rightarrow$ conseguimos colorir propriamente, no máximo, 6 arestas com 3 cores

Luís Felipe
14/10/22

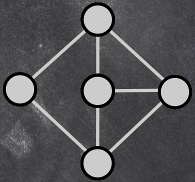
Coloração de Arestas

Exemplo:

$\Delta = 3$

G não admite 3-coloração própria.

Como provar?



$n = 5, \ m = 7$

$\alpha' \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2$

$3 \times 2 = 6 \rightarrow$ conseguimos colorir propriamente, no máximo, 6 arestas com 3 cores

Logo, não existe 3-coloração própria para G.

Luís Felipe

14/10/22

Coloração de Arestas: limites

Podemos perceber facilmente que:

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas: limites

Podemos perceber facilmente que:

$$\Delta \leq \chi' \leq m$$

Luís Felipe
14/10/22

Coloração de Arestas: limites

Podemos perceber facilmente que:

$$\Delta \leq \chi' \leq m$$

O Teorema de Vizing prova que $\chi' \leq \Delta + 1$

Luís Felipe
14/10/22

Teorema de Vizing

Teorema. (Vizing) Para todo G, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema de Vizing

Teorema. (Vizing) Para todo G, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Quando $\chi'(G) = \Delta(G)$, dizemos que G é classe I.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema de Vizing

Teorema. (Vizing) Para todo G, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Quando $\chi'(G) = \Delta(G)$, dizemos que G é classe 1.

Quando $\chi'(G) = \Delta + 1$, dizemos que G é classe 2.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema de Vizing

Teorema. (Vizing) Para todo G, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Quando $\chi'(G) = \Delta(G)$, dizemos que G é classe 1.

Quando $\chi'(G) = \Delta + 1$, dizemos que G é classe 2.

Obs.: Apresentaremos alguns resultados necessários preliminares.

Luís Felipe
14/10/22

Dizemos que uma cor i está representada em um vértice $v \in V$ quando alguma aresta incidente a v tem cor i.

Luís Felipe
14/10/22

Dizemos que uma cor i está representada em um vértice $v \in V$ quando alguma aresta incidente a v tem cor i.

$c(v)$ é o número de cores distintas representadas em v.

Luís Felipe
14/10/22

Dizemos que uma cor i está representada em um vértice $v \in V$ quando alguma aresta incidente a v tem cor i.

$c(v)$ é o número de cores distintas representadas em v.

$$c(v) \leq d(v)$$

Luís Felipe
14/10/22

Dizemos que uma cor i está representada em um vértice $v \in V$ quando alguma aresta incidente a v tem cor i.

$c(v)$ é o número de cores distintas representadas em v.

$$c(v) \leq d(v)$$

Uma coloração é própria $\leftrightarrow$ $c(v) = d(v), \forall v \in V$.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Luís Felipe

14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1:

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par.

Luís Felipe 14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano.

Luís Felipe

14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Luís Felipe

14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par. Consequentemente, existe vértice v_0 com grau $d(v_0) \geq 4$ e par.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par. Consequentemente, existe vértice v_0 com grau $d(v_0) \geq 4$ e par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano iniciado por aresta incidente em v_0.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par. Consequentemente, existe vértice v_0 com grau $d(v_0) \geq 4$ e par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano iniciado por aresta incidente em v_0.
Colora as arestas usando a regra do Caso 1.1.

Luís Felipe
14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par. Consequentemente, existe vértice v_0 com grau $d(v_0) \geq 4$ e par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano iniciado por aresta incidente em v_0.

Colora as arestas usando a regra do Caso 1.1. Como v_0 tem grau maior ou igual a 4, então no passeio teremos saída e entrada por esse vértice,

Luís Felipe

14/10/22

Lema. Seja G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar. Existe uma 2-coloração para G tal que em todo vértice de grau maior do que 1, as duas cores estão representadas.

Prova: Vamos separar em 2 casos: G é Euleriano; G não é Euleriano.

Caso 1: Considere G Euleriano. Assim, existe uma trilha fechada tal que todos os vértices aparecem.

Caso 1.1 Considere G um ciclo par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano. Pinte as arestas com índice ímpar com a cor 1 e as arestas de índice par com a cor 2.

Caso 1.2 Considere G Euleriano e não é um ciclo par. Consequentemente, existe vértice v_0 com grau $d(v_0) \geq 4$ e par. Seja $e_1, e_2, \ldots, e_n$ um passeio Euleriano iniciado por aresta incidente em v_0.

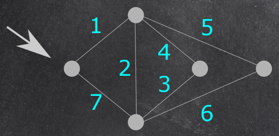
Colora as arestas usando a regra do Caso 1.1. Como v_0 tem grau maior ou igual a 4, então no passeio teremos saída e entrada por esse vértice, o que acarreta índices de duas paridades distintas nestes vértices.

Luís Felipe
14/10/22

Obs.: Observe que se tomássemos o início do passeio por um vértice de grau 2, utilizando a mesma regra do caso 1.1, poderíamos não ter duas paridades distintas neste vértice, caso houvesse número ímpar de arestas no grafo.

Luís Felipe
14/10/22

Obs.: Observe que se tomássemos o início do passeio por um vértice de grau 2, utilizando a mesma regra do caso 1.1, poderíamos não ter duas paridades distintas neste vértice, caso houvesse número ímpar de arestas no grafo.

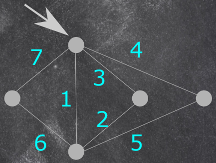


Luís Felipe
14/10/22

Obs.: Observe que se tomássemos o início do passeio por um vértice de grau 2, utilizando a mesma regra do caso 1.1, poderíamos não ter duas paridades distintas neste vértice, caso houvesse número ímpar de arestas no grafo.

Luís Felipe
14/10/22

Obs.: Observe que se tomássemos o início do passeio por um vértice de grau 2, utilizando a mesma regra do caso 1.1, poderíamos não ter duas paridades distintas neste vértice, caso houvesse número ímpar de arestas no grafo.



Luís Felipe
14/10/22

Caso 2: Considere G não Euleriano.

Luís Felipe
14/10/22

Caso 2: Considere G não Euleriano. Dessa forma, existem vértices em G de grau ímpar.

Luís Felipe
14/10/22

Caso 2: Considere G não Euleriano. Dessa forma, existem vértices em G de grau ímpar. Como consequência do Lema do Aperto de Mãos, há um número par de vértices de grau ímpar em G.

Luís Felipe
14/10/22

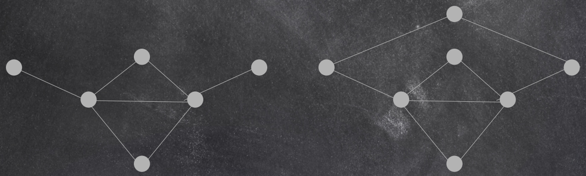
Caso 2: Considere G não Euleriano. Dessa forma, existem vértices em G de grau ímpar. Como consequência do Lema do Aperto de Mãos, há um número par de vértices de grau ímpar em G.

Transforme G no grafo G' acrescentando um vértice no grafo e tornando esse vértice adjacente aos vértices de grau ímpar em G.

Luís Felipe
14/10/22

Caso 2: Considere G não Euleriano. Dessa forma, existem vértices em G de grau ímpar. Como consequência do Lema do Aperto de Mãos, há um número par de vértices de grau ímpar em G.

Transforme G no grafo G' acrescentando um vértice no grafo e tornando esse vértice adjacente aos vértices de grau ímpar em G.



Pinte arestas de G' sendo a regra do caso 1, começando por aresta incidente ao vértice adicionado.

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

- Todo vértice com grau maior do que 1 em G tem duas cores representadas,

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

- Todo vértice com grau maior do que 1 em G tem duas cores representadas, por também estarem internamente numa trilha Euleriana

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

- Todo vértice com grau maior do que 1 em G tem duas cores representadas, por também estarem internamente numa trilha Euleriana (ou seja, alternam a paridade dos índices);
- Os vértices ímpares ou tem grau 1 (ao qual não trata o enunciado do lema) ou maior do que 3, e portanto,

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

- Todo vértice com grau maior do que 1 em G tem duas cores representadas, por também estarem internamente numa trilha Euleriana (ou seja, alternam a paridade dos índices);
- Os vértices ímpares ou tem grau 1 (ao qual não trata o enunciado do lema) ou maior do que 3, e portanto, a 2-coloração vai funcionar,

Luís Felipe
14/10/22

Esta 2-coloração para G', quando restrita a G, também satisfaz a propriedade desejada, pois:

- Todo vértice com grau maior do que 1 em G tem duas cores representadas, por também estarem internamente numa trilha Euleriana (ou seja, alternam a paridade dos índices);
- Os vértices ímpares ou tem grau 1 (ao qual não trata o enunciado do lema) ou maior do que 3, e portanto, a 2-coloração vai funcionar, por ter arestas saindo e entrando no percurso.

Luís Felipe
14/10/22

Uma k-coloração $\mathcal{C}'$ é uma melhoria de uma k-coloração $\mathcal{C}$ quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

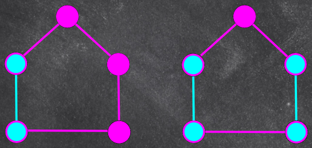
Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.

Luís Felipe
14/10/22

Uma k-coloração $\mathcal{C}'$ é uma melhoria de uma k-coloração $\mathcal{C}$ quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.



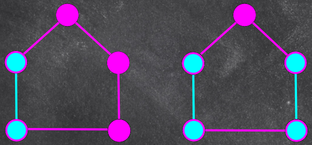
Luís Felipe
14/10/22

Uma k-coloração $\mathcal{C}'$ é uma melhoria de uma k-coloração $\mathcal{C}$ quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.

não própria

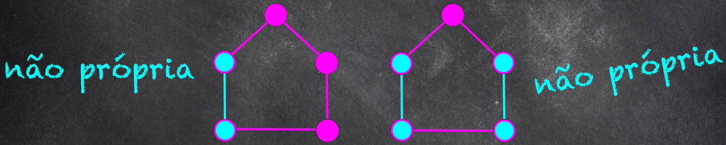


Luís Felipe
14/10/22

Uma k-coloração $\mathcal{C}'$ é uma melhoria de uma k-coloração $\mathcal{C}$ quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.



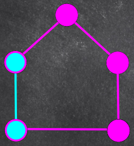
Luís Felipe
14/10/22

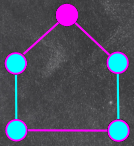
Uma k-coloração $\mathcal{C}'$ é uma melhoria de uma k-coloração $\mathcal{C}$ quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.

não própria





não própria

ótima

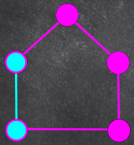
Luís Felipe
14/10/22

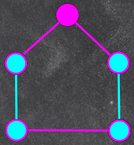
Uma k-coloração C' é uma melhoria de uma k-coloração C quando

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

Uma k-coloração que não admite melhoria é ótima.

não própria





não própria
ótima

Toda coloração não-ótima tem repetição de cor em algum vértice.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar. Pelo lema anterior, H admite uma 2-coloração tal que em todo vértice com grau maior que 1, as duas cores estão representadas.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar. Pelo lema anterior, H admite uma 2-coloração tal que em todo vértice com grau maior que 1, as duas cores estão representadas.

Recolora H com esta 2-coloração, obtendo uma nova k-coloração $\mathcal{C}'$ para G.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar. Pelo lema anterior, H admite uma 2-coloração tal que em todo vértice com grau maior que 1, as duas cores estão representadas.

Recolora H com esta 2-coloração, obtendo uma nova k-coloração $\mathcal{C}'$ para G.

Como $d(v) > 1$ em H, temos que $c'(u) = c(u) + 1$ e $c'(v) \geq c(v)$ para $v \neq u$.

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar. Pelo lema anterior, H admite uma 2-coloração tal que em todo vértice com grau maior que 1, as duas cores estão representadas.

Recolora H com esta 2-coloração, obtendo uma nova k-coloração $\mathcal{C}'$ para G.

Como $d(v) > 1$ em H, temos que $c'(u) = c(u) + 1$ e $c'(v) \geq c(v)$ para $v \neq u$. Logo, $\mathcal{C}'$ é uma melhoria para $\mathcal{C}$,

Luís Felipe
14/10/22

Lema: Seja G um grafo com uma k-coloração ótima $\mathcal{C}$ tal que existe um vértice u satisfazendo:

- uma cor i_0 não está representada em u;
- uma cor i_1 está representada pelo menos duas vezes em u.

Então a componente H de $G[E_{i_0}, E_{i_1}]$ que contém u é um ciclo ímpar.

Prova: Suponha que H não é um ciclo ímpar. Pelo lema anterior, H admite uma 2-coloração tal que em todo vértice com grau maior que 1, as duas cores estão representadas.

Recolora H com esta 2-coloração, obtendo uma nova k-coloração $\mathcal{C}'$ para G.

Como $d(v) > 1$ em H, temos que $c'(u) = c(u) + 1$ e $c'(v) \geq c(v)$ para $v \neq u$. Logo, $\mathcal{C}'$ é uma melhoria para C, contrariando C ser ótima.

Luís Felipe

14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova:

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$,

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$, já que esta coloração não é própria.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$, já que esta coloração não é própria.

Logo, existem duas cores i_0 e i_1 tais que i_0 não está representada em u e i_1 está representada em u pelo menos duas vezes

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$, já que esta coloração não é própria.

Logo, existem duas cores i_0 e i_1 tais que i_0 não está representada em u e i_1 está representada em u pelo menos duas vezes (pois $\mathcal{C}$ não é própria, então alguma cor se repete. Além disso, para a coloração ser própria então há alguma cor não representada em u que deve ser).

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$, já que esta coloração não é própria.

Logo, existem duas cores i_0 e i_1 tais que i_0 não está representada em u e i_1 está representada em u pelo menos duas vezes (pois $\mathcal{C}$ não é própria, então alguma cor se repete. Além disso, para a coloração ser própria então há alguma cor não representada em u que deve ser).

Pelo lema anterior, temos que G é um ciclo ímpar.

Luís Felipe
14/10/22

Teorema. Se G é bipartido, então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: Assuma, por contradição, que $\chi'(G) > \Delta$.

Seja $\mathcal{C}$ uma Δ-coloração ótima. Então existe algum vértice u tal que $c(u) < d(u) \leq \Delta$, já que esta coloração não é própria.

Logo, existem duas cores i_0 e i_1 tais que i_0 não está representada em u e i_1 está representada em u pelo menos duas vezes (pois $\mathcal{C}$ não é própria, então alguma cor se repete. Além disso, para a coloração ser própria então há alguma cor não representada em u que deve ser).

Pelo lema anterior, temos que G é um ciclo ímpar. Contradição, dado que G é bipartido.