Aula 12 - Cobertura

Luís Felipe

UFF

07 de Outubro de 2022

Luís Felipe
07/10/22

Emparelhamento × Cobertura

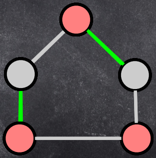
Uma cobertura K de arestas por vértices é um subconjunto $K \subseteq V$ tal que toda aresta do grafo é incidente a algum vértice de K.

- Em outras palavras, o subgrafo $G[V \setminus K]$ não tem arestas.

Denotaremos por α' a cardinalidade de um emparelhamento máximo.

Denotaremos por β a cardinalidade de uma cobertura mínima das arestas por vértices.

$$\alpha' = 2$$
$$\beta = 3$$



Luís Felipe
07/10/22

Emparelhamento $\times$ Cobertura

Seja M um emparelhamento. Qualquer cobertura K das arestas por vértices satisfaz:

$$|M| \leq |K|$$

Note que cada aresta do emparelhamento deve ser coberta por um vértice, um dos vértices extremos da aresta do emparelhamento.
Em particular, se M é máximo e K é mínimo, obtemos:

$$\alpha' \leq \beta$$

? Existe algum grafo onde $\alpha' = \beta$?

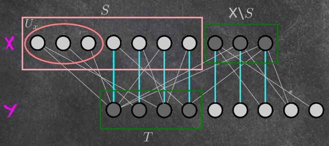
SIM!!

Luís Felipe
07/10/22

Teorema de König

Teorema: Num grafo bipartido, $\alpha' = \beta$.

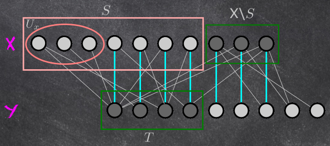
Prova:



Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) e M um emparelhamento máximo de G.

Denote por U_x o conjunto de vértices não-saturados de X, e Z o conjunto de todos os vértices que estão no caminho M-alternante partindo dos vértices de U_x.

Luís Felipe
07/10/22



Seja $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Assim como na demonstração do Teo de Hall, cada vértice em T é M-saturado e $N(S) = T$.

Seja $K^* = (X \setminus S) \cup T$. Cada aresta de G possui como extremo, necessariamente, algum vértice de K^*. Caso contrário, existiria uma aresta com extremo em S e outro em $Y \setminus T$, contrariando $N(S) = T$.

Assim, $|M| = |K^*|$.

Luís Felipe

07/10/22

Fim da matéria

P1