Aula 11 - Emparelhamento (parte 11)

Luís Felipe

UFF

05 de Outubro de 2022

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova:

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva).

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P,

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$,

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$,

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Todo caminho M-aumentante tem, necessariamente, quantidade par de vértices,

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Todo caminho M-aumentante tem, necessariamente, quantidade par de vértices, pois as arestas alternam entre não pertence e pertence a M, iniciando e finalizando com arestas que não pertencem a M.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Todo caminho M-aumentante tem, necessariamente, quantidade par de vértices, pois as arestas alternam entre não pertence e pertence a M, iniciando e finalizando com arestas que não pertencem a M.
Seja $P = v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$.

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: ($\rightarrow$) (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Todo caminho M-aumentante tem, necessariamente, quantidade par de vértices, pois as arestas alternam entre não pertence e pertence a M, iniciando e finalizando com arestas que não pertencem a M.
Seja $P = v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$. Assim, $|M| = x + k - 1$ e $|M'| = x + k$.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: $(\rightarrow)$ (Prova pela contrapositiva). Suponha que G possui um caminho M-aumentante P. Obtemos o emparelhamento M' tal que $|M'| = |M| + 1$:

- Mantenha as arestas de M que não pertencem a P, seja x esse número de arestas;
- Remova $M \cap E(P)$, ou seja, remova de M as arestas de P;
- Adicione $E(P) \setminus M$, ou seja, adicione as arestas de P que não pertenciam a M.

Todo caminho M-aumentante tem, necessariamente, quantidade par de vértices, pois as arestas alternam entre não pertence e pertence a M, iniciando e finalizando com arestas que não pertencem a M.
Seja $P = v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$. Assim, $|M| = x + k - 1$ e $|M'| = x + k$.
Assim, M não é máximo, pois M' tem cardinalidade maior.

Luís Felipe
05/10/22

Para a volta . . .

Para mostrar a volta, vamos dar uma pausa no Teorema de Berge e falar sobre diferença simétrica.

Luís Felipe
05/10/22

Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A **diferença simétrica** $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Luís Felipe
05/10/22

Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Considerando conjunto de arestas, em particular, emparelhamentos M e M', $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

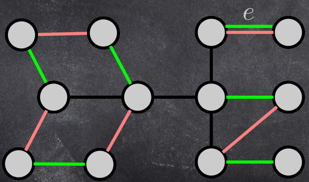
Luís Felipe
05/10/22

Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Considerando conjunto de arestas, em particular, emparelhamentos M e M', $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Exemplo:



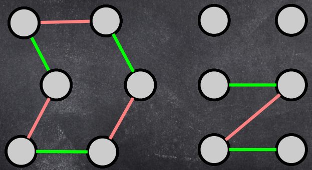
Luís Felipe
05/10/22

Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Considerando conjunto de arestas, em particular, emparelhamentos M e M', $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Exemplo:



Luís Felipe

05/10/22

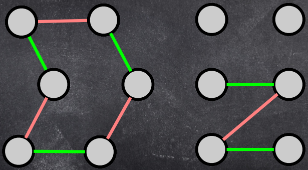
Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Considerando conjunto de arestas, em particular, emparelhamentos M e M', $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Exemplo:

ciclo par



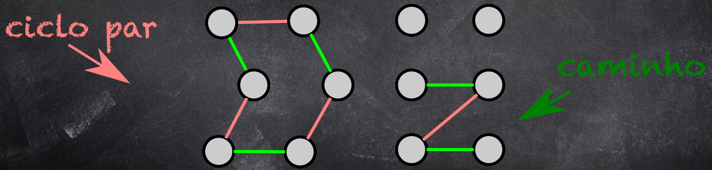
Luís Felipe
05/10/22

Diferença simétrica

Sejam G e H grafos com mesmo conjunto de vértices V. A diferença simétrica $G \triangle H$ é o grafo com conjunto de vértices V cujas arestas são aquelas que aparecem em exatamente um dos grafos.

Considerando conjunto de arestas, em particular, emparelhamentos M e M', $M \triangle M' = (M - M') \cup (M' - M)$.

Exemplo:



Luís Felipe
05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Luís Felipe
05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$,

Luís Felipe

05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$, pois cada vértice é extremo de no máximo uma aresta de cada emparelhamento.

Luís Felipe
05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$, pois cada vértice é extremo de no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Com isso, cada componente é um ciclo ou um caminho.

Luís Felipe
05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$, pois cada vértice é extremo de no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Com isso, cada componente é um ciclo ou um caminho.

Além disso, como não há duas arestas consecutivas de um ciclo de um mesmo emparelhamento (isso implicaria duas arestas de um emparelhamento com mesmo extremo),

Luís Felipe

05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$, pois cada vértice é extremo de no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Com isso, cada componente é um ciclo ou um caminho.

Além disso, como não há duas arestas consecutivas de um ciclo de um mesmo emparelhamento (isso implicaria duas arestas de um emparelhamento com mesmo extremo), cada ciclo deve alternar entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$.

Luís Felipe
05/10/22

Lema (intermediário ao Teo de Berge)

Lema: Cada componente conexa da diferença simétrica de dois emparelhamentos é ou um ciclo par ou um caminho.

Prova: Cada vértice de M ou M' possui grau no máximo 2 em $M \Delta M'$, pois cada vértice é extremo de no máximo uma aresta de cada emparelhamento. Com isso, cada componente é um ciclo ou um caminho.

Além disso, como não há duas arestas consecutivas de um ciclo de um mesmo emparelhamento (isso implicaria duas arestas de um emparelhamento com mesmo extremo), cada ciclo deve alternar entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$. Implicando assim, em cada ciclo ser par.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M. Pelo lema anterior, $F = M \Delta M'$ é constituído por ciclos pares e caminhos.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M. Pelo lema anterior, $F = M \Delta M'$ é constituído por ciclos pares e caminhos. Ciclos pares alternam entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$, portanto possuem mesmo tamanho.

Luís Felipe

05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M. Pelo lema anterior, $F = M \Delta M'$ é constituído por ciclos pares e caminhos. Ciclos pares alternam entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$, portanto possuem mesmo tamanho.

Como $|M'| > |M|$, então F possui, necessariamente, uma componente conexa que é caminho.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M. Pelo lema anterior, $F = M \Delta M'$ é constituído por ciclos pares e caminhos. Ciclos pares alternam entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$, portanto possuem mesmo tamanho.

Como $|M'| > |M|$, então F possui, necessariamente, uma componente conexa que é caminho. Além disso, esse caminho deve iniciar e terminar com arestas de $M' - M$, pois $|M'| > |M|$.

Luís Felipe
05/10/22

De volta à volta do Teo de Berge

($\leftarrow$) Seja G um grafo. Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é um emparelhamento máximo de G.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Suponha que G tenha um emparelhamento M' de cardinalidade maior do que M. Pelo lema anterior, $F = M \Delta M'$ é constituído por ciclos pares e caminhos. Ciclos pares alternam entre arestas de $M - M'$ e de $M' - M$, portanto possuem mesmo tamanho.

Como $|M'| > |M|$, então F possui, necessariamente, uma componente conexa que é caminho. Além disso, esse caminho deve iniciar e terminar com arestas de $M' - M$, pois $|M'| > |M|$. Assim, este é um caminho M-aumentante.

Luís Felipe
05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Luís Felipe

05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore.

Luís Felipe

05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore. Suponha que há dois emparelhamentos perfeitos M e M' em T.

Luís Felipe
05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore. Suponha que há dois emparelhamentos perfeitos M e M' em T. Ao obter $F = M \Delta M'$ temos que há ciclos pares ou caminhos em F. Como T é árvore, então não há ciclos,

Luís Felipe
05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore. Suponha que há dois emparelhamentos perfeitos M e M' em T. Ao obter $F = M \Delta M'$ temos que há ciclos pares ou caminhos em F. Como T é árvore, então não há ciclos, implicando assim, que F seja uma união de caminhos.

Luís Felipe
05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore. Suponha que há dois emparelhamentos perfeitos M e M' em T. Ao obter $F = M \Delta M'$ temos que há ciclos pares ou caminhos em F. Como T é árvore, então não há ciclos, implicando assim, que F seja uma união de caminhos.

Como T possui dois emparelhamentos perfeitos, em todos os caminhos de F os vértices extremos pertencem a somente a um dos emparelhamentos. Logo, M ou M' não é emparelhamento perfeito.

Luís Felipe
05/10/22

Corolário: Uma árvore admite, no máximo, um emparelhamento perfeito.

Prova: Seja T uma árvore. Suponha que há dois emparelhamentos perfeitos M e M' em T. Ao obter $F = M \Delta M'$ temos que há ciclos pares ou caminhos em F. Como T é árvore, então não há ciclos, implicando assim, que F seja uma união de caminhos.

Como T possui dois emparelhamentos perfeitos, em todos os caminhos de F os vértices extremos pertencem a somente a um dos emparelhamentos. Logo, M ou M' não é emparelhamento perfeito.

Contradição, por termos assumido M e M' emparelhamentos perfeitos.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$ Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X,

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$ Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X, então cada vértice de $S \subseteq X$ possui um vizinho em $N(S)$ para formar um par cuja aresta associada pertence ao emparelhamento.

Luís Felipe
05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$ Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X, então cada vértice de $S \subseteq X$ possui um vizinho em $N(S)$ para formar um par cuja aresta associada pertence ao emparelhamento.

Como um vértice de $N(S)$ não pode ser associado a mais do que um vértice de S no emparelhamento

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$ Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X, então cada vértice de $S \subseteq X$ possui um vizinho em $N(S)$ para formar um par cuja aresta associada pertence ao emparelhamento.

Como um vértice de $N(S)$ não pode ser associado a mais do que um vértice de S no emparelhamento (caso contrário, existiriam duas arestas no emparelhamento com extremo em comum),

Luís Felipe

05/10/22

Teorema de Hall

Teorema: Seja G um grafo bipartido com bipartição $V = X \cup Y$. G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X se, e somente, $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$.

Prova: $(\rightarrow)$ Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X, então cada vértice de $S \subseteq X$ possui um vizinho em $N(S)$ para formar um par cuja aresta associada pertence ao emparelhamento.

Como um vértice de $N(S)$ não pode ser associado a mais do que um vértice de S no emparelhamento (caso contrário, existiriam duas arestas no emparelhamento com extremo em comum), $|N(S)| \geq |S|$.

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$)

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que,

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$,

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$, se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$ então G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X.

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$, se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$ então G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X.

Vamos mostrar pela contrapositiva.

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$, se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$ então G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X.

Vamos mostrar pela contrapositiva. Ou seja: Se G não contém um emparelhamento que satura todo vértice de X então existe $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$.

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$, se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$ então G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X.

Vamos mostrar pela contrapositiva. Ou seja: Se G não contém um emparelhamento que satura todo vértice de X então existe $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$. Em outras palavras:

Luís Felipe
05/10/22

Volta do Teorema de Hall

($\leftarrow$) Queremos mostrar que, para um dado grafo bipartido G com bipartição $V = X \cup Y$, se $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq X$ então G contém um emparelhamento que satura todo vértice de X.

Vamos mostrar pela contrapositiva. Ou seja: Se G não contém um emparelhamento que satura todo vértice de X então existe $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$. Em outras palavras:

Se M é um emparelhamento máximo em G e M não satura todo X, então vamos obter um conjunto $S \subseteq X$ tal que $|N(S)| < |S|$.

Luís Felipe

05/10/22

Continuação

Seja $u \in X$ um vértice não-saturado por M.

Luís Felipe

05/10/22

Continuação

Seja $u \in X$ um vértice não-saturado por M. Dentre todos os vértices alcançáveis de u por caminhos M-alternantes em G, sejam:

- S é o conjunto dos vértices de X dos caminhos M-alternantes partindo de u;

Luís Felipe
05/10/22

Continuação

Seja $u \in X$ um vértice não-saturado por M. Dentre todos os vértices alcançáveis de u por caminhos M-alternantes em G, sejam:

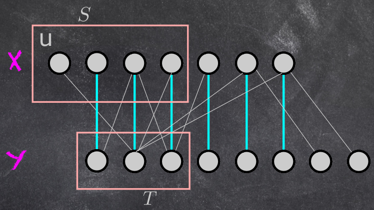
- S é o conjunto dos vértices de X dos caminhos M-alternantes partindo de u;
- T é o conjunto dos vértices de Y dos caminhos M-alternantes partindo de u.

Luís Felipe
05/10/22

Continuação

Seja $u \in X$ um vértice não-saturado por M. Dentre todos os vértices alcançáveis de u por caminhos M-alternantes em G, sejam:

- S é o conjunto dos vértices de X dos caminhos M-alternantes partindo de u;
- T é o conjunto dos vértices de Y dos caminhos M-alternantes partindo de u.

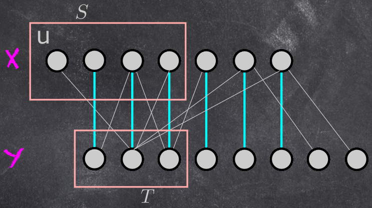


Luís Felipe
05/10/22

Continuação

Seja $u \in X$ um vértice não-saturado por M. Dentre todos os vértices alcançáveis de u por caminhos M-alternantes em G, sejam:

- S é o conjunto dos vértices de X dos caminhos M-alternantes partindo de u;
- T é o conjunto dos vértices de Y dos caminhos M-alternantes partindo de u.



Queremos mostrar que $T = N(S)$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M,

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese),

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$.

Luís Felipe

05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$. A aresta $yv \notin M$,

Luís Felipe

05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$. A aresta $yv \notin M$, pois $u \notin M$ e os demais vértices de S são emparelhados com T por M.

Luís Felipe

05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$. A aresta $yv \notin M$, pois $u \notin M$ e os demais vértices de S são emparelhados com T por M. Assim, teria caminho M-alternante de u (insaturado) até v (insaturado), contradição.

Luís Felipe
05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$. A aresta $yv \notin M$, pois $u \notin M$ e os demais vértices de S são emparelhados com T por M. Assim, teria caminho M-alternante de u (insaturado) até v (insaturado), contradição.

Assim, $T = N(S)$,

Luís Felipe

05/10/22

Finalização

Note que M emparelha T com $S \setminus \{u\}$. Isto porque todo vértice de T é de um caminho M-alternante partindo de u cuja aresta de u no caminho não pertencem a M, e dessa forma, percorre por Y por vértices cujas arestas retornando a S estão em M.

Como M é um emparelhamento máximo (por hipótese), então não existe caminho M-aumentante em G e todo vértice de T é saturado. Assim, existe uma associação de cada vértice de T para um vértice de $S \setminus \{u\}$. Temos que $|T| = |S \setminus \{u\}|$.
Com o emparelhamento entre T e $S \setminus \{u\}$, temos que $T \subseteq N(S)$. Mais do que isso, vamos mostrar que $T = N(S)$.

Suponha $y \in Y \setminus T$ possui um vizinho $v \in S$. A aresta $yv \notin M$, pois $u \notin M$ e os demais vértices de S são emparelhados com T por M. Assim, teria caminho M-alternante de u (insaturado) até v (insaturado), contradição.

Assim, $T = N(S)$, e com isso, $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$.

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y).

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

Luís Felipe

05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

$$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|.$$

Luís Felipe

05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$. Ou seja, $|N(S)| \geq |S|$,

Luís Felipe

05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$. Ou seja, $|N(S)| \geq |S|$, e assim, G possui um emparelhamento que satura todo vértice de X,

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$. Ou seja, $|N(S)| \geq |S|$, e assim, G possui um emparelhamento que satura todo vértice de X, como $|X| = |Y|$,

Luís Felipe
05/10/22

Consequência do Teorema de Hall

Corolário: Se G é um grafo k-regular bipartido com $k > 0$, então G admite emparelhamento perfeito.

Prova: Seja G grafo bipartido com bipartição (X, Y). Temos que $|E| = k|X| = k|Y|$, e como $k > 0$, então $|X| = |Y|$.

Sejam $S \subseteq X$, E_1 e E_2 os conjuntos de arestas incidentes a vértices de S e $N(S)$, resp.

Por definição de $N(S)$, temos que $E_1 \subseteq E_2$ e assim:

$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$. Ou seja, $|N(S)| \geq |S|$, e assim, G possui um emparelhamento que satura todo vértice de X, como $|X| = |Y|$, M é um emparelhamento perfeito.