Aula 10: Grafos Hamiltonianos e Emparelhamento

Luís Felipe

UFF

30 de Setembro de 2022

Luís Felipe
30/09/22

Na aula passada vimos . . .

Grafos Hamiltonianos.

Luís Felipe

30/09/22

Na aula passada vimos . . .

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

Luís Felipe
30/09/22

Na aula passada vimos ...

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

- Conexidade,

Luís Felipe
30/09/22

Na aula passada vimos ...

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

- Conexidade, Biconexidade,

Luís Felipe
30/09/22

Na aula passada vimos . . .

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

- Conexidade, biconexidade, propriedade do corte.

Luís Felipe

30/09/22

Na aula passada vimos . . .

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

- Conexidade, Biconexidade, propriedade do corte.

Condição suficiente para grafos serem Hamiltonianos.

Luís Felipe

30/09/22

Na aula passada vimos ...

Grafos Hamiltonianos.

Condições necessárias de grafos Hamiltonianos.

- Conexidade, Biconexidade, propriedade do corte.

Condição suficiente para grafos serem Hamiltonianos.

- Teorema de Dirac

Luís Felipe
30/09/22

Hoje veremos ...

- Consequências do Teorema de Dirac.

Luís Felipe
30/09/22

Hoje veremos . . .

- Consequências do Teorema de Dirac.
  - Teorema de Ore,

Luís Felipe
30/09/22

Hoje veremos ...

- Consequências do Teorema de Dirac.
  - Teorema de Ore, Fecho.

Luís Felipe

30/09/22

Hoje veremos . . .

- Consequências do Teorema de Dirac.
  - Teorema de Ore, Fecho.
- Emparelhamentos

Luís Felipe

30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac:

Luís Felipe
30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Luís Felipe

30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova feita na aula 9

Ore (1960) observou que a hipótese de Dirac de $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ é usada somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$

Luís Felipe
30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova feita na aula 9

Ore (1960) observou que a hipótese de Dirac de $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ é usada somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$ (reveja isto no final da aula 9)

Luís Felipe
30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova feita na aula 9

Ore (1960) observou que a hipótese de Dirac de $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ é usada somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$ (reveja isto no final da aula 9) para um par de vértices u e v não adjacentes em G.

Luís Felipe

30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova feita na aula 9

Ore (1960) observou que a hipótese de Dirac de $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ é usada somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$ (reveja isto no final da aula 9) para um par de vértices u e v não adjacentes em G.

Dessa forma, temos:

Luís Felipe

30/09/22

Teorema de Ore

Teorema de Dirac: Se G é um grafo com pelo menos 3 vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Prova feita na aula 9

Ore (1960) observou que a hipótese de Dirac de $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ é usada somente para mostrar que $d(u) + d(v) \geq n$ (reveja isto no final da aula 9) para um par de vértices u e v não adjacentes em G.

Dessa forma, temos:

Teorema: Sejam G um grafo, u e v vértices não adjacentes em G tais que: $d(u) + d(v) \geq n$. G é Hamiltoniano se, e somente se, $G + uv$ é hamiltoniano.

Luís Felipe
30/09/22

Prova do Teorema de Ore

Prova: ($\rightarrow$) Se G é hamiltoniano, então a adição de qualquer aresta mantém o grafo hamiltoniano.

Luís Felipe
30/09/22

Prova do Teorema de Ore

Prova: $(\rightarrow)$ Se G é hamiltoniano, então a adição de qualquer aresta mantém o grafo hamiltoniano.

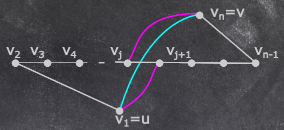
$(\leftarrow)$ Seja $G + uv$ é hamiltoniano, como em G $d(u) + d(v) \geq n$, então há um ciclo hamiltoniano em G pelo mesmo argumento utilizado no Teorema de Dirac.

Luís Felipe
30/09/22

Prova do Teorema de Ore

Prova: ($\rightarrow$) Se G é hamiltoniano, então a adição de qualquer aresta mantém o grafo hamiltoniano.

($\leftarrow$) Seja $G + uv$ é hamiltoniano, como em G $d(u) + d(v) \geq n$, então há um ciclo hamiltoniano em G pelo mesmo argumento utilizado no Teorema de Dirac.



Luís Felipe
30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

Luís Felipe
30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

O fecho de G é o grafo obtido recursivamente por tornar vizinhos vértices antes não-adjacentes tais que a soma dos seus graus é pelo menos n,

Luís Felipe
30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

O fecho de G é o grafo obtido recursivamente por tornar vizinhos vértices antes não-adjacentes tais que a soma dos seus graus é pelo menos n, até que tal par não exista.

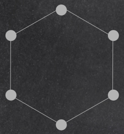
Luís Felipe

30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

O fecho de G é o grafo obtido recursivamente por tornar vizinhos vértices antes não-adjacentes tais que a soma dos seus graus é pelo menos n, até que tal par não exista.



Luís Felipe

30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

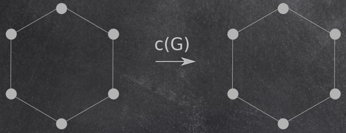
O fecho de G é o grafo obtido recursivamente por tornar vizinhos vértices antes não-adjacentes tais que a soma dos seus graus é pelo menos n, até que tal par não exista.

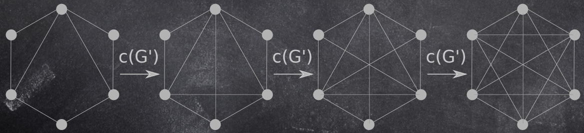
Luís Felipe
30/09/22

Fecho

A partir do argumento de Dirac, podemos definir uma operação em grafos chamada de fecho.

O fecho de G é o grafo obtido recursivamente por tornar vizinhos vértices antes não-adjacentes tais que a soma dos seus graus é pelo menos n, até que tal par não exista.





Luís Felipe
30/09/22

Fecho

Teorema: Um grafo G é hamiltoniano se, e somente se, seu fecho for hamiltoniano.

Luís Felipe
30/09/22

Fecho

Teorema: Um grafo G é hamiltoniano se, e somente se, seu fecho for hamiltoniano.

Prova: Note que estamos a cada momento adicionando arestas entre vértices que satisfazem a condição do teorema anterior.

Luís Felipe
30/09/22

Fecho

Teorema: Um grafo G é hamiltoniano se, e somente se, seu fecho for hamiltoniano.

Prova: Note que estamos a cada momento adicionando arestas entre vértices que satisfazem a condição do teorema anterior.
Podemos aplicar o Teorema de Ore a cada passo até obter o fecho de G.

Luís Felipe
30/09/22

Fecho

Teorema: Um grafo G é hamiltoniano se, e somente se, seu fecho for hamiltoniano.

Prova: Note que estamos a cada momento adicionando arestas entre vértices que satisfazem a condição do teorema anterior.
Podemos aplicar o Teorema de Ore a cada passo até obter o fecho de G.

Corolário: Seja G um grafo cujo fecho é K_n. Assim, G é hamiltoniano.

Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Exemplo:

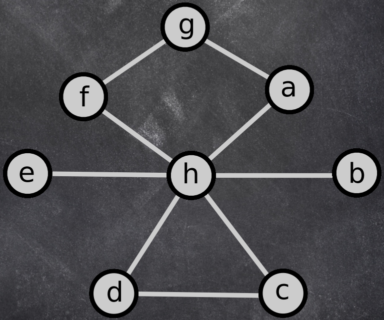
Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Exemplo:



Luís Felipe

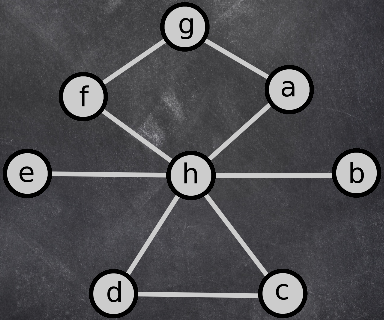
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$



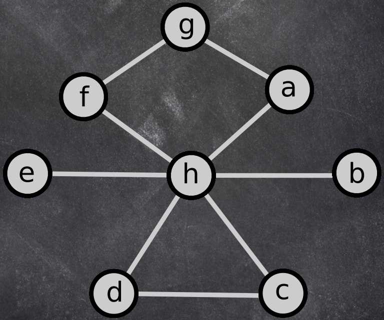
Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Exemplo:

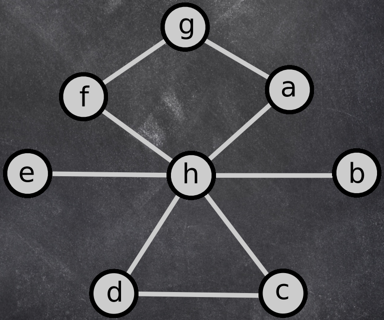
- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$



Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).



Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$

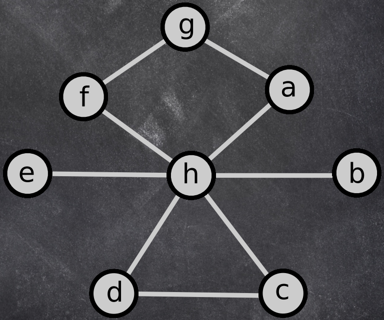
Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

Um emparelhamento $M \subseteq E$ é um subconjunto das arestas tal que qualquer par de arestas em M são não adjacentes (não tem extremo comum).

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$
- $M_4 = \{ch, fg\}$



Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

- Um emparelhamento é maximal se não está contido propriamente em nenhum outro.

Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

- Um emparelhamento é maximal se não está contido propriamente em nenhum outro.
- Um emparelhamento é máximo se tem cardinalidade máxima.

Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

- Um emparelhamento é maximal se não está contido propriamente em nenhum outro.
- Um emparelhamento é máximo se tem cardinalidade máxima.
- Um emparelhamento é perfeito se tem cardinalidade $\frac{n}{2}$.

Luís Felipe

30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

Luís Felipe

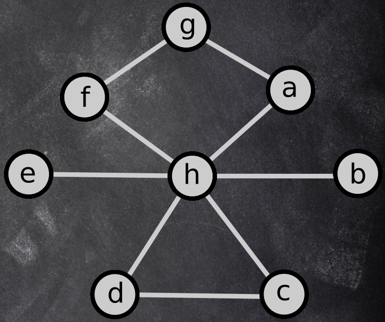
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$
- $M_4 = \{ch, fg\}$

maximal

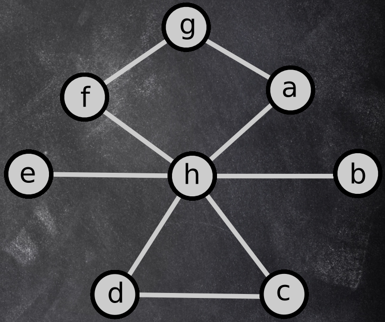


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$ maximal
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$ maximal
- $M_4 = \{ch, fg\}$

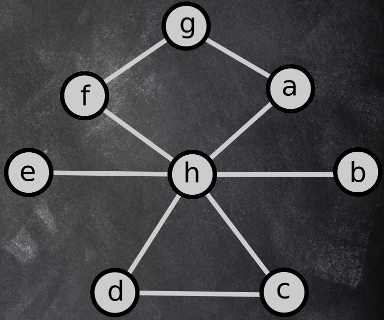


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$ maximal
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$ maximal
- $M_4 = \{ch, fg\}$ maximal

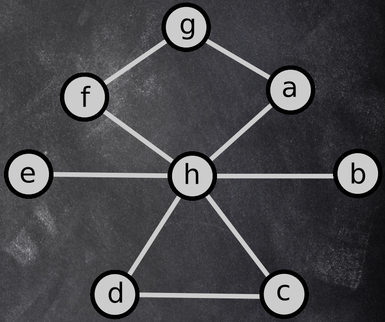


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$ máximo
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$
- $M_4 = \{ch, fg\}$ maximal

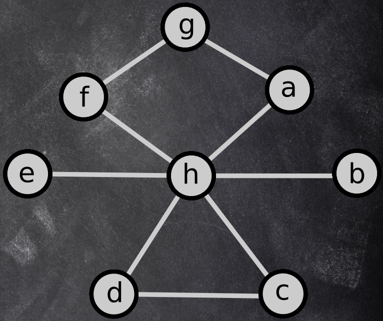


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$ máximo
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$ máximo
- $M_4 = \{ch, fg\}$ maximal

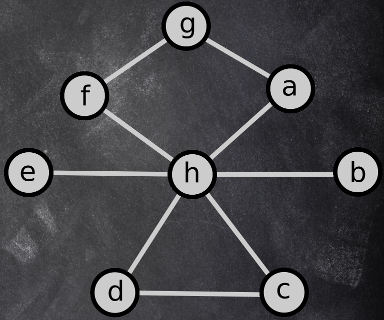


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Exemplo:

- $M_1 = \{fg\}$
- $M_2 = \{fg, ah, cd\}$ máximo
- $M_3 = \{eh, cd, ag\}$ máximo
- $M_4 = \{ch, fg\}$ maximal



G não tem emparelhamento perfeito

Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

Luís Felipe

30/09/22

Emparelhamentos

- Dada uma aresta $xy \in M$, dizemos que os extremos x e y são M-emparelhados.

Luís Felipe

Emparelhamentos

- Dada uma aresta $xy \in M$, dizemos que os extremos x e y são M-emparelhados.
- Se $\exists e \in M$ incidente a um vértice x, dizemos que x está M-saturado. Caso contrário, dizemos que x é M-insaturado.

Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

- Dada uma aresta $xy \in M$, dizemos que os extremos x e y são M-emparelhados.
- Se $\exists e \in M$ incidente a um vértice x, dizemos que x está M-saturado. Caso contrário, dizemos que x é M-insaturado.

Problema alvo: Encontrar um emparelhamento máximo (Problema de otimização)

Luís Felipe
30/09/22

Emparelhamentos

- Dada uma aresta $xy \in M$, dizemos que os extremos x e y são M-emparelhados.
- Se $\exists e \in M$ incidente a um vértice x, dizemos que x está M-saturado. Caso contrário, dizemos que x é M-insaturado.

Problema alvo: Encontrar um emparelhamento máximo (Problema de otimização)

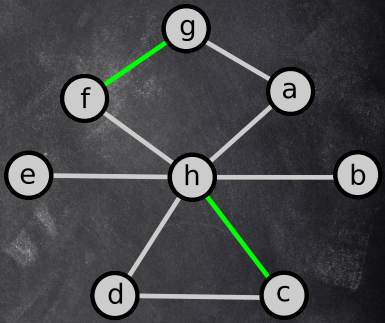
Ferramentas: caminho alternante
caminho aumentante

Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

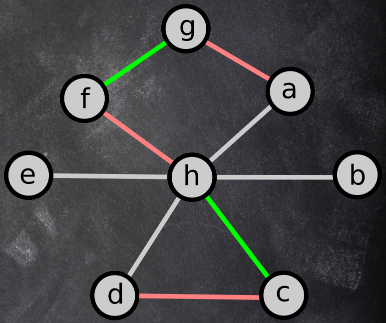
Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo



Luís Felipe
30/09/22

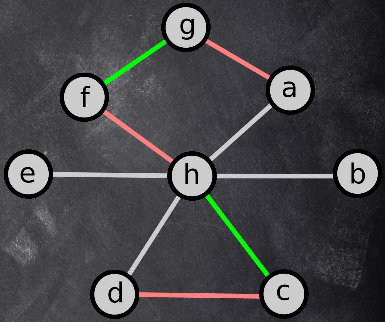
Voltando ao exemplo



Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Um caminho M-alternante
em G é um caminho cujas arestas
estão, alternadamente,
em M e em $E \setminus M$.

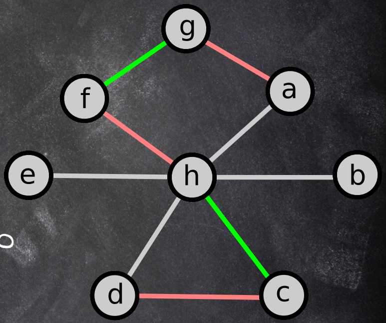


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

Um caminho M-alternante
em G é um caminho cujas arestas
estão, alternadamente,
em M e em $E \setminus M$.

Se, além disso, a origem e o término
do caminho são M-insaturados,
então o caminho é M-aumentante.

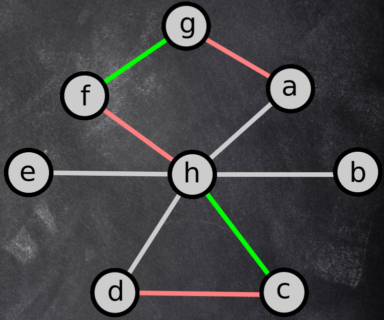


Luís Felipe

30/09/22

Voltando ao exemplo

$M_4 = \{ch, fg\}$ é maximal
$(G \setminus \{c, h, f, g\}$ é
conjunto independente)

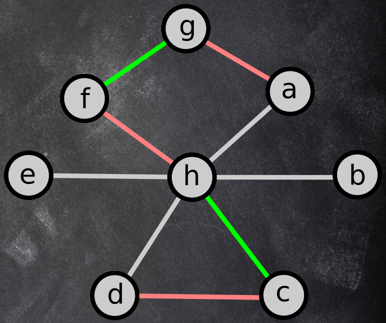


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

$M_4 = \{ch, fg\}$ é maximal
$(G \setminus \{c, h, f, g\}$ é
conjunto independente)

O caminho $dchfga$ é M_4-alternante.

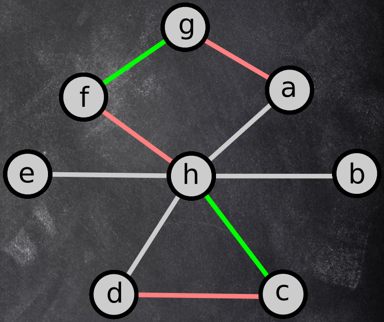


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

$M_4 = \{ch, fg\}$ é maximal
$(G \setminus \{c, h, f, g\}$ é
conjunto independente)

Os vértices d, a são M_4-insaturados
Logo, o caminho é M_4-aumentante.
$M' = \{cd, hf, ga\}$ maximal.

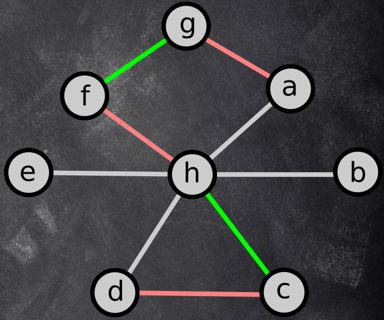


Luís Felipe
30/09/22

Voltando ao exemplo

$M_4 = \{ch, fg\}$ é maximal
$(G \setminus \{c, h, f, g\}$ é
conjunto independente)

Os vértices d, a são M_4-insaturados
Logo, o caminho é M_4-aumentante.
$M' = \{cd, hf, ga\}$ maximal.



Existe caminho M'-aumentante?

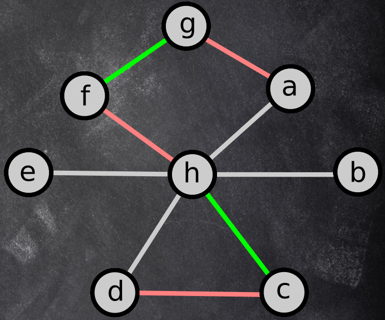
Luís Felipe

30/09/22

Voltando ao exemplo

$M_4 = \{ch, fg\}$ é maximal
$(G \setminus \{c, h, f, g\}$ é
conjunto independente)

Os vértices d, a são M_4-insaturados
Logo, o caminho é M_4-aumentante.
$M' = \{cd, hf, ga\}$ maximal.



Existe caminho
M'-aumentante?

NÃO!!

Luís Felipe

30/09/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Luís Felipe
30/09/22

Teorema de Berge

Teorema: Seja G um grafo. M é um emparelhamento máximo de G se, e somente se, G não contém caminho M-aumentante.

Prova: Aula que vem!