Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 8 – Triângulo de Pascal

1. Mostre que para todos $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$, temos que: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   Resposta: Temos duas formas de mostrar essa relação: por meios algébricos ou por meio combinatório. Faremos da segunda forma.

   Vamos considerar o seguinte problema de contagem: Seja P um conjunto com n pessoas. Quantas comissões com k destas n pessoas podemos formar, sendo que cada comissão possui um presidente?

   Primeira maneira: para formar tal comissão, podemos fazer duas escolhas: escolher k pessoas para formar uma comissão. Isso pode ser feita de $\binom{n}{k}$ formas; escolher 1 dente as k já escolhidas, para ser o presidente. Isso pode ser feito de k formas. Temos assim, pelo PM, $\binom{n}{k}k$ comissões.

   Segunda maneira: Para formar uma tal comissão, podemos fazer duas escolhas: escolher 1 pessoa, dentre todas as disponíveis para ser o presidente. Isso pode ser feito de n formas; escolher $k-1$ pessoas, dentre as que ainda não foram escolhidas, para terminar de formar a comissão. Isso pode ser feito de $\binom{n-1}{k-1}$. Temos assim, pelo PM $\binom{n-1}{k-1}n$ comissões.

2. Mostre que para todos $n, k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, temos que: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ das duas formas a seguir:

   (a) por argumentos algébricos.

   Resposta: Sabemos que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Além disso, $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

   (b) por argumentos combinatórios.

   Resposta: Sabemos que $\binom{n}{k}$ é a contagem do número comissões de k elementos dentre n elementos. Note que uma vez escolhido um subconjunto de k elementos para pertencer a solução, o subconjunto restante, de $n-k$ elementos, é também escolhido, para não pertencer a solução.

3. Mostre a Relação de Stifel por meio de argumento algébrico.

   Resposta: Note que $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \frac{(n-1)!k}{(n-k)!(k-1)!k} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!k!} = \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

4. Mostre que para todos $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq m \leq n$, temos que: $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

   Resposta: Um argumento combinatório pode ser visto pela seguinte problemática: De um conjunto de n pessoas, quantas comissões de m pessoas podem ser formadas, donde para cada comissão dessas m pessoas queremos formar k comissões?

Primeira forma: Primeiro obtemos comissões de m pessoas dentre n. Isso pode ser feito de $\binom{n}{m}$ formas. Para cada comissão de m pessoas, vamos escolher subconjuntos de tamanho k. Isso pode ser feito de $\binom{m}{k}$. Pelo PM, temos $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ formas.

Segunda forma: Primeiro vamos obter, dentre n pessoas, subconjuntos com k elementos. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ formas. Das $n-k$ pessoas restantes, vamos escolher $m-k$ que são as pessoas que não foram escolhidas para comissão feita no primeiro passo e compõem as comissões de m pessoas. Isso pode ser feita de $\binom{n-k}{m-k}$. Pelo PM, temos $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ formas.

5. Para todos $n, m \in \mathbb{N}$, temos que: $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$.

   Resposta: Um argumento combinatório pode ser visto pela seguinte problemática: Suponha que haja numa sala n meninas e m meninos. Quantas as formas de termos pares de pessoas?

   Primeira forma: Há $n+m$ pessoas e queremos escolher duas. Isso pode ser feito de $\binom{n+m}{2}$ formas.

   Segunda forma: Podemos formar uma partição do conjunto solução de três formas. Os pares são de duas meninas. Isso pode ser feito de $\binom{n}{2}$ formas; Os pares são de dois meninos. Isso pode ser feito de $\binom{m}{2}$ formas; Os pares são de uma menina e um menino. Pelo PM, isso pode ser feito de nm formas. Assim, pelo PA, há $\binom{n}{2} + \binom{m}{2} + nm$ formas.