Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 7 – Combinações com repetição

1. Dados os números $2, 4, 7, 9$ e 10, quantos produtos diferentes é possível estabelecer multiplicando 2 deles, se cada fator pode aparecer mais de uma vez no produto?

   Resposta: **Resolução** 1 (utilizando Combinação com Repetição): Neste problema, as configurações são os produtos obtidos pela multiplicação de quaisquer 2 dos números apresentados. Seja X o conjunto de tais produtos.

   Como a ordem dos fatores não altera o produto, cada elemento de X corresponde a uma combinação completa com 5 variáveis e 2 objetos. Ou seja, queremos saber o número de soluções não negativas para $x_2 + x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} = 2$. Onde x_i é a variável associada ao uso do número i, para $i \in \{2, 4, 7, 9, 10\}$.

   Assim, temos $|X| = C(5 + 2 - 1, 5 - 1) = C(6, 4) = C(6, 2) = \frac{6.5}{2} = 15$.

   Resolução 2: O produto pode obtido ou pela escolha de 2 números distintos dentre os 5 possíveis números, para tal há $C(5, 2) = \frac{5.4}{2} = 10$ possibilidades, ou pela escolha de 2 números iguais, para tal há $C(5, 1) = 5$ possibilidades. Pelo PA, temos $C(5, 2) + C(5, 1)$ possibilidades.

   Obs.: Note que $C(5, 2) + C(5, 1) = C(6, 2)$ por aplicação da Relação de Stifel (Conteúdo da aula 9).

2. Uma fábrica produz caixas de bombons, contendo 24 bombons escolhidos dentre os 8 tipos de bombons que ela fabrica. Sabendo que na fábrica tem estoque suficiente de bombons, quantos tipos de caixas de bombons ela pode colocar no mercado?

   Resposta: Precisamos formar uma caixa com 24 bombons e temos 8 tipos diferentes. Cada tipo corresponde a uma variável e devemos ter 24 objetos. Sendo assim, temos a expressão: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 24$. E com isso, temos: $C(24 + 8 - 1, 8 - 1)$ possibilidades.

3. Quantos tipos diferentes de taça de sorvete com 3 bolas uma pessoa pode montar em uma sorveteria que oferece 7 sabores diferentes de sorvete?

   Resposta: Por argumento análogo da questão anterior, basta resolver a expressão: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3$

4. Quantas são as soluções em números naturais da equação $x + y + z = 7$?

   Resposta: Por argumento análogo das duas questões anteriores, temos: $C(7 + 3 - 1, 3 - 1) = C(9, 2)$.

5. Determine o número de maneiras de selecionar, no máximo 15 brinquedos, de 4 tipos diferentes: tipo 1, tipo 2, tipo 3 e tipo 4, sendo que devem ser selecionados pelo menos

1 do tipo 1, pelo menos 2 do tipo 2 e pelo menos 3 do tipo 4. Suponha que cada tipo de brinquedo tem um estoque suficiente para que o problema tenha solução.

Resposta: Como há 4 tipos de brinquedos diferentes e queremos obter no máximo 15, temos a seguinte expressão: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$. Para termos uma igualdade, adicionemos a expressão uma variável de folga $f \geq 0$, e assim: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + f = 15$. Além disso, $x_1 = x'_1 + 1$, $x_2 = x'_2 + 2$, $x_4 = x'_4 + 3$, para $x'_1, x'_2, x_3, x'_4 \geq 0$. Assim: $x'_1 + 1 + x'_2 + 2 + x_3 + x'_4 + 3 + f = 15$.

Dessa forma, $x'_1 + x'_2 + x_3 + x'_4 + f = 15 - 6 = 9$. Portanto, há $C(9 + 5 - 1, 5 - 1) = C(13, 4)$ formas.

6. De quantas maneiras podem ser distribuídas 8 bombons e 3 balas entre 5 crianças, nos seguintes casos:

   (a) Os bombons são todos idênticos e as balas são todas idênticas.

   Resposta: Denotamos por x_i e y_i os números de bombons e de balas, respectivamente, que a criança i pode receber, sendo $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Primeiro calculamos os modos de distribuir os bombons, que é equivalente a encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$. Isso corresponde a $C(8 + 5 - 1, 5 - 1) = C(12, 4)$ modos de distribuir os bombons.

   Agora, calculemos os modos de distribuir as balas entre as crianças. Similarmente, temos a expressão: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3$. Isso corresponde a $C(3 + 5 - 1, 5 - 1) = C(7, 4)$ modos.

   Pelo PM, temos $C(12, 4)C(7, 4)$ formas.

   (b) Os bombons são todos idênticos e as balas são todas idênticas. Além disso, nenhuma criança pode receber mais de uma bala. Justifique.

   Resposta: Usemos a mesma notação do item anterior. Como aqui não mudou a distribuição dos bombons, temos $C(12, 4)$ modos. No caso da distribuição das balas temos a restrição de que cada criança não pode receber mais de uma bala. Isso significa que das 5 crianças, 3 recebem uma bala, isto é, cada modo corresponde a escolha de 3 crianças dentre 5. Portanto, temos $C(5, 3)$ modos diferentes.

   Então, pelo PM, temos $C(12, 4)C(5, 3)$ maneiras diferentes de distribuir os 5 bombons e 3 balas.

7. Quantas soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$, exatamente 2 variáveis são iguais a 1?

Resposta: Note que há $C(5, 2)$ pares de variáveis para serem iguais a 1. Como para cada escolha de par, as variáveis contribuem com exatamente uma unidade, queremos obter as soluções para quando as três variáveis restantes somem 16. Ou seja, temos a expressão $u + v + z = 16$ para resolver. Além disso, buscamos soluções positivas, dessa forma u, v, z devem possuir valores maiores do que 0. Ao mesmo tempo que devem possuir valores maiores do que 1, pois os pares com valores iguais a 1 já foram escolhidos. Dessa forma, temos que u, v e z devem ser pelo menos 2. Assim, $u = u' + 2$, $v = v' + 2$ e $z = z' + 2$. Portanto, temos: $u' + 2 + v' + 2 + z' + 2 = 16$. Ou seja: $u' + v' + z' = 10$. Portanto, $C(10 + 3 - 1, 3 - 1) = C(12, 2)$. Concluímos então, pelo PM, que há $C(5, 2)C(12, 2)$.

8. Sabendo-se que a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ possui 10 soluções inteiras positivas, determinar n.

Resposta: Como as soluções devem ser inteiras positivas, então $x_i \geq 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$. Assim, temos $x'_1 + 1 + x'_2 + 1 + x'_3 + 1 + x'_4 + 1 = n$ para $x'_i \geq 0$. Dessa forma, temos a expressão: $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = n - 4$. A solução é dada por $C(n - 4 + 4 - 1, 4 - 1)$, ou seja, $C(n - 1, 3)$. Como dado no enunciado, temos: $C(n - 1, 3) = 10$. Assim, $n = 6$, pois $C(6 - 1, 3) = C(5, 3) = \frac{5.4.3}{6} = 10$.