Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 6 – Princípio aditivo, multiplicativo e aplicações

1. Um cadeado de mala tem os algarismos 0 a 9 dispostos horizontalmente. As senhas desse cadeado têm comprimento de 4 algarismos. Quantas senhas diferentes são possíveis se a sequência 09 deve aparecer sempre e os dígitos não podem se repetir?

   Resolução: Vamos assumir que a sequência 09 representa um único algarismo. Para solucionar a questão, vamos escolher os outros 2 algarismos. Como a ordem dos algarismos em uma senha é relevante, e os algarismos 0 e 9 já estão sendo utilizados, temos $A(8, 2) = 8 \times 7 = 56$ maneiras distintas de escolher e posicionar os outros 2 algarismos. Podemos posicionar a sequência 09 de 3 formas possíveis, a saber, antes dos dois algarismos já posicionados, entre esses dois algarismos, ou após os dois algarismos. Logo, pelo P.M., temos $56 \times 3 = 168$ senhas de dígitos distintos que possuem a sequência 09.

2. Um estudante precisa selecionar 5 disciplinas, entre 12, para o próximo semestre e uma delas tem de ser Física ou Álgebra Linear. De quantas maneiras o estudante pode escolher suas disciplinas? Justifique.

   Resolução: Observe que o estudante deve cursar pelo menos uma disciplina entre Física ou Álgebra Linear e pode, inclusive, cursar ambas. Assim, vamos resolver a questão dividindo-a em 2 casos.

   - Ele vai cursar, exclusivamente, uma das disciplinas.
     Neste caso, ele tem que escolher outras 4 disciplinas para cursar dentre as 10 restantes, o que pode ser feito de $C(10, 4) = \frac{10!}{4!6!}$ formas. Como ele pode escolher entre Física ou Álgebra Linear, pelo PM, temos $2 \times C(10, 4)$.
   - Ele vai cursar ambas, Física e Álgebra Linear.
     Então, resta-lhe escolher outras 3 disciplinas para cursar, o que pode ser feito de $C(10, 3) = \frac{10!}{3!7!}$ formas distintas.

   Daí, pelo PA, o aluno pode escolher sua grade curricular de $(2 \times C(10, 4)) + C(10, 3)$ formas distintas.

3. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra PROBLEMA:

   (a) nos quais as letras P, R, O ocorrem todas juntas?

   Resolução: Vamos inicialmente fazer a permutação das três letras P, R, O. Para isso, temos 3! ordenações. Após isto vamos fazer a permutação das demais letras B, L, E, M, A . Para isso, temos 5! ordenações. Finalmente, vamos ocupar as três letras em um dos 6 espaços possíveis das permutações das letras B, L, E, M, A.

Pelo PM, existem $3! \times 5! \times 6$ anagramas da palavra PROBLEMA nos quais as letras P, R, O ocorrem todas juntas.

(b) nos quais as letras P, R, O não ocorrem todas juntas?

Resolução: Considere o conjunto X de todos os anagramas da palavra PROBLEMA particionado nos seguintes conjuntos:

- X_1: dos anagramas nos quais as letras P, R, O ocorrem todas juntas
- X_2: dos anagramas nos quais as letras P, R, O não ocorrem todas juntas

Queremos determinar $|X_2|$. Pelo PA, $|X| = |X_1| + |X_2|$. Assim, se determinamos $|X|$ e $|X_2|$, o problema está resolvido.

Determinando $|X|$: cada elemento de X corresponde a uma permutação de 8 objetos. Assim, $|X| = P_8 = 8!$.

Determinando $|X_1|$: pelo item (a), $|X_1| = 3! \times 6! \times 5$.

Determinando $|X_2|$: Pelo PA, temos $|X_2| = |X| - |X_1| = 8! - (3! \times 6!)$.

(c) nos quais as letras P, R, O ocorrem todas separadas?

Resolução: Vamos executar 4 tarefas: escolher uma permutação de BLEMA, isso pode ser feito de 5! maneiras; escolher três lugares de seis lugares em ordem para ocupar as letras P, R, O, isso pode ser feito de $A(6,3)$ maneiras.

Pelo PM, existem $5! \times A(6,3)$ anagramas da palavra PROBLEMA nos quais P, R, O ocorrem todas separadas.

4. Dentre os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. Quantos números de cinco algarismos podem ser formados:

(a) Se o algarismo da unidade é um número par e o do milhar é um número ímpar.

Resolução: Para formar um número $d_5d_4d_3d_2d_1$ satisfazendo as condições dadas, podemos executar 5 tarefas: escolher um algarismo par para ser d_1, isso pode ser feito de 4 formas; escolher um algarismo para ser d_2, isso pode ser feito de 9 formas; escolher um algarismo para ser d_3, isso pode ser feito de 9 formas; escolher um algarismo para ser d_4, isso pode ser feito de 5 formas; escolher um algarismo para ser d_5, isso pode ser feito de 9 formas.

Pelo PM, existem $4 \times 5 \times 9^3$ números.

(b) Se o algarismo da unidade é um número par, o do milhar é um número ímpar e o número possui pelo menos dois algarismos iguais.

Resolução: Sejam:

N: conjunto dos números formados com 5 algarismos;
D: conjunto dos elementos de N com 5 algarismos diferentes;
I: conjunto dos elementos de N com pelo menos 2 algarismos iguais.

Temos que D e I formam uma partição de N. Assim, pelo PA, $|N| = |D| + |I|$. Por (a), temos que $|N| = 4 \times 5 \times 9^3$.

Para formar um número $d_5d_4d_3d_2d_1$ em D, temos: 4 possibilidades para d_1; 5 possibilidades para d_2; 7 possibilidades para d_3; 6 possibilidades para d_4; 5 possibilidades para d_5.

Assim, pelo PM, $|D| = 4 \times 5^2 \times 6 \times 6 \times 7$. Logo, pelo PA, temos que $|I| = |N| - |D|$.

5. Quantos números naturais com 7 algarismos, que terminem com 9 ou 0, podem ser formados de maneira que:

(a) todos os algarismos sejam distintos.

Resolução: Como queremos os números que tenham 7 algarismos distintos e que terminem em 9 ou 0, então teremos que dividir o problema em duas partes:

- Terminam em 9: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos distintos e o algarismo 9 não figura. Assim, na primeira posição não podemos considerar os algarismos 0 e 9, logo temos 8 possíveis algarismos para este dígito. Do segundo ao sexto dígito, basta fazermos um arranjo simples considerando o 0 como opção e excluindo o algarismo utilizado na primeira posição e o algarismo 9: $A(8,5) = \frac{8!}{5!}$. Portanto, pelo P.M. temos $8 \times \frac{8!}{5!}$ números naturais de 7 algarismos distintos que terminam em 9.
- Terminam em 0: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos distintos e o algoritmo 0 não figura. Neste caso basta fazermos um arranjo simples dos 6 dígitos sem a presença do 0 como algarismo, e isto pode ser feito de $A(9,6) = \frac{9!}{3!}$.

Portanto, pelo PA, temos $(8 \times \frac{8!}{3!}) + \frac{9!}{3!}$ números naturais de 7 algarismos distintos que terminam em 9 ou 0.

(b) os algarismos podem se repetir.

Resolução: Como queremos os números que tenham 7 algarismos e que terminam em 9 ou 0, então teremos que dividir o problema em duas partes:

- Terminam em 9: este problema é equivalente a encontrar os números que têm 6 algarismos. Desta forma, não podemos considerar o algarismo 0 para a primeira posição. Sendo assim, temos 9 possíveis algarismos para este dígito. Do segundo ao sexto dígito, pelo PM temos 10^5 possíveis algarismos. Portanto, pelo PM, temos 9×10^5 números naturais de 7 algarismos que terminam em 9.
- Terminam em 0: este problema é equivalente ao item anterior. Logo, pelo PM, temos 9×10^5 números naturais de 7 algarismos que terminam em 0.

Portanto, pelo PA, temos $(9 \times 10^5) + (9 \times 10^5)$ números naturais de 7 algarismos que terminam em 9 ou 0.

6. São dados objetos de oito tipos, $t_1, t_2, \ldots, t_8$, de modo que os objetos de cada tipo são dados em quantidade ilimitada, e um tabuleiro oito por oito, dividido em casas. De quantas maneiras esse tabuleiro pode ser preenchido com esses objetos, de modo que no máximo um objeto de cada tipo ocupe cada casa, sendo que:

(a) nenhuma casa pode ficar vazia?

Resolução: Como temos um tabuleiro 8 por 8, dividido em casas, temos que há 64 casas no tabuleiro. Devemos escolher uma das maneiras de preencher cada casa, sendo que a casa não pode ficar vazia. Assim, para uma casa, temos para cada tipo de objeto a possibilidade dela figurar ou não na casa, ou seja haveria 2^8 maneiras de preencher uma casa, porém uma casa não pode ficar vazia. Assim, existem $2^8 - 1$ maneiras de preencher a casa, sendo que cada casa não pode ficar vazia.

Portanto, pelo PM, temos $\underbrace{(2^8-1) \times (2^8-1) \times \cdots \times (2^8-1)}_{\text{64 vezes}}$ maneiras de preencher o tabuleiro, sendo que nenhuma casa fique vazia.

(b) qualquer casa pode ficar vazia?

Resolução: Justificativa similar ao item anterior, pelo PM, temos $\underbrace{2^8 \times 2^8 \times \cdots \times 2^8}_{\text{64 vezes}}$ maneiras.

7. Dispomos de cinco pessoas, entre elas Ana, Beto e Ciça. De quantas maneiras elas podem se sentar em dez cadeias colocadas em fila:

(a) sem restrições?

Resolução: Há 10 cadeiras e devemos escolher 5 delas para as pessoas sentarem. Note que a ordem em que as pessoas sentam nas cadeiras importa na solução. Dessa forma, temos $A(10,5)$ maneiras.

(b) se Beto não senta em nenhuma cadeira localizada antes da cadeira em que Ana senta?

Resolução: Inicialmente, escolhemos duas cadeiras, para que Beto e Ana se sentem de modo a satisfazer a restrição pedida. Para isso, há $C(10,2)$ maneiras. Restam agora oito cadeiras, e devemos escolher três para ocupar as demais pessoas, para isso há $A(8,3)$ maneiras. Pelo PM, temos então $C(10,5)A(8,3)$ maneiras.

(c) se Ana, Beto e Ciça sentam nesta ordem, não necessariamente em cadeiras consecutivas?

Resolução: Escolhemos, inicialmente, três cadeiras para Ana, Beto e Ciça sentarem, nesta ordem. Para isso, temos $C(10,3)$ maneiras. Agora, escolhemos duas cadeiras dentre as sete restantes para posicionar as pessoas. Para isso, temos $A(7,2)$ maneiras. Pelo PM, temos então $C(10,3)A(7,2)$ maneiras.

8. Em um encontro de professores compareceram 30 professores do estados e 20 professores do município. Quantas comissões de 8 professores podem ser formadas:

(a) no total?

Resolução: Cada comissão corresponde a uma combinação dos 50 professores tomados 8 a 8. Assim, existem $C(50,8)$ maneiras.

(b) contendo pelo menos 6 professores do município, sendo que um deles é o presidente e outro é o tesoureiro da comissão.

Resolução: Façamos uma partição do conjunto solução de modo a considerar os seguintes casos:

- Há exatamente 6 professores do município: Há $C(20,6)$ formas de escolher 6 professores do município. Dentre eles, há 6×5 maneiras de escolhermos o presidente e o tesoureiro. Além disso, nos restam $C(30,2)$ maneiras de escolher dois professores do estado. Pelo PM, temos $C(20,6) \times 6 \times 5 \times C(30,2)$ maneiras.
- Há exatamente 7 professores do município: Há $C(20,7)$ formas de escolher 7 professores do município. Dentre eles, há 7×6 maneiras de escolhermos o presidente e o tesoureiro. Além disso, nos restam $C(30,1) = 30$ maneiras de escolher um professor do estado. Pelo PM, temos $C(20,7) \times 7 \times 6 \times 30$ maneiras.
- Há exatamente 8 professores do município: Há $C(20,8)$ formas de escolher 8 professores do município. Dentre eles, há 8×7 maneiras de escolhermos o presidente e o tesoureiro. Pelo PM, temos $C(20,8) \times 8 \times 7$ maneiras.

Pelo PA, temos $(C(20,6) \times 6 \times 5 \times C(30,2)) + (C(20,7) \times 7 \times 6 \times 30) + (C(20,8) \times 8 \times 7)$ maneiras.

9. Dispomos de oito homens e cinco mulheres, entre os quais estão Marcelo e Kátia. Quantas comissões podemos formar:

(a) com três homens e três mulheres?

Resolução: Vamos escolher três dentre oito homens e três dentre cinco mulheres para formar as comissões. Pelo PM, temos $C(8,3)C(5,3)$ maneiras.

(b) com três homens e três mulheres, sabendo que Marcelo não participa de nenhuma comissão na qual Kátia está?

Resolução: Considere o conjunto C de todas as comissões com 3 homens e 3 mulheres particionado nos seguintes subconjuntos:

S: comissões que possuem ambos Marcelo e Kátia como membros
N: comissões que não possuem ambos Marcelo e Kátia como membros

Observe que S e N são uma partição de C. Queremos determinar $|N|$. Pelo PA, temos $|C| = |S| + |N|$, ou seja, $|N| = |C| - |S|$.

Pelo item (a), $|C| = C(8,3)C(5,3)$.

Para formar uma comissão em S podemos executar três tarefas: colocar Marcelo e Kátia na comissão. Para isso, há uma única maneira; escolher dois homens diferentes de Marcelo para fazer parte da comissão. Para isso, há $C(7,2)$ maneiras; escolher duas mulheres diferentes de Kátia na comissão. Para isso, há $C(4,2)$ maneiras. Assim, pelo PM, existem $1C(7,2)C(4,2)$ tais comissões.

Assim, temos que $|N| = C(8,3)C(5,3) - C(7,2)C(4,2)$.