Universidade Federal Fluminense
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professor: Luís Felipe

Gabarito Lista 4 – Lógica Matemática: Quantificadores, equivalências e negação de enunciados com um quantificador

1. Mostre que os enunciados abaixo são equivalentes:

   (a) $\neg\exists x[f(x)]$ e $\forall x[\neg f(x)]$

   (b) $\exists x[f(x) \vee g(x)]$ e $[\exists x f(y)] \vee [\exists x g(x)]$

   Resolução: (a) Seja D um domínio de quantificação genérico, cujos elementos vamos denotar arbitrariamente por $a, b, c, \cdots$, e uma propriedade qualquer em D, representada por $f(x)$. De acordo com as regras de avaliação do $\neg$, do $\exists$ e do $\forall$, temos: $\neg\exists x[f(x)] : V$ se, e somente se, $\exists x[f(x)] : F$ se, e somente se, a "disjunção possivelmente infinita" $f(a) \vee f(b) \vee f(c) \vee \cdots$ é F se, e somente se, a "disjunção possivelmente infinita" $[\neg\neg f(a)] \vee [\neg\neg f(b)] \vee [\neg\neg f(c)] \vee \cdots$ é F se, e somente se, a negação $\neg\{[\neg f(a)] \wedge [\neg f(b)] \wedge [\neg f(c)] \wedge \cdots\}$, de uma "conjunção possivelmente infinita" é F se, e somente se, a "conjunção possivelmente infinita" $[\neg f(a)] \wedge [\neg f(b)] \wedge [\neg f(c)] \wedge \cdots$ é V se, e somente se, $\forall x[\neg f(x)] : V$. Assim, $\neg\exists x[f(x)]$ e $\forall x[\neg f(x)]$ têm os mesmos valores para qualquer domínio D e qualquer propriedade em D, representada por $f(x)$. Logo, $\neg\exists x[f(x)]$ e $\forall x[\neg f(x)]$ são equivalentes. (b) Seja D um domínio de quantificação genérico, cujos elementos vamos denotar arbitrariamente por $a, b, c, \cdots$, e duas propriedades quaisquer em D, representadas por $f(x)$ e $g(x)$. De acordo com as regras de avaliação do $\vee$ e do $\exists$, temos que: $\exists x[f(x) \vee g(x)] : V$ se, e somente se, a "disjunção possivelmente infinita" $[f(a) \vee g(a)] \vee [f(b) \vee g(b)] \vee [f(c) \vee g(c)] \vee \cdots$ é V se, e somente se, a "disjunção possivelmente infinita" $[f(a) \vee f(b) \vee f(c) \vee \cdots] \vee [g(a) \vee g(b) \vee g(c)] \vee \cdots$ é V se, e somente se, $\exists x[f(x)] \vee \exists x[g(x)] : V$. Assim, $\exists x[f(x) \vee g(x)]$ e $\exists x[f(x)] \vee \exists x[g(x)]$ têm os mesmos valores para qualquer domínio D e quaisquer propriedades em D, representadas por $f(x)$ e $g(x)$. Logo, $\exists x[f(x) \vee g(x)]$ e $\exists x[f(x)] \vee \exists x[g(x)]$ são equivalentes.

2. Mostre, usando interpretações, que os enunciados abaixo não são equivalentes.

   (a) $\forall x[p(x) \vee q(x)]\ e\ \forall x[p(x)] \vee \forall x[q(x)]$

   (b) $\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]\ e\ \exists x[p(x)] \rightarrow \exists x[q(x)]$

   Resolução: (a) Considere a legenda $\begin{array}{ccl} D & : & \mathbb{N} \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser ímpar.} \end{array}$ Nesta interpretação $\forall x[p(x) \vee q(x)]$ "significa" $\forall x$ (xé par $\vee$ x é ímpar) e, portanto, é V. Enquanto que $\forall x[p(x)] \vee \forall x[q(x)]$ "significa"

$[\forall x\ (x \text{ é par})] \vee [\forall x\ x(\text{é ímpar})]$ e, portanto, é F. Observe que, nesta interpretação, ambos $\forall x(x \text{ é par })$: F e $\forall x\ (x \text{ é ímpar})$: F (b) Considere a legenda:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N} \\ p & : & \text{ser par} \\ q & : & \text{ser negativo.} \end{array}$$

Nesta interpretação $\exists x[p(x) \to q(x)]$ "significa" $\exists x(x\text{é par} \to x\text{é negativo})$ e, portanto, é V. Para ver isto, basta considerar o número 1. Observe que a implicação 1 é par $\to$ 1 é negativo é V. E que, portanto, a existencialização $\exists x(x$ é par $\to$ x é negativo) também é V. Enquanto que $\exists x[p(x)] \to \exists x[q(x)]$ "significa" $[\exists x(x \text{ é par})] \to [\exists x(x \text{ é negativo})]$ e, portanto, é F. Para ver isto, basta observar que o antecedente $\exists x(x$ é par) é V e o consequente $\exists x(x$ é negativo) é F.

3. Classifique como constante ou variável:

(a) 2^{2^2}
(b) $x+1$
(c) Pelé
(d) um amigo de Pelé
(e) (x, y)
(f) o quadrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$
(g) $2 \times \frac{x}{2}$
(h) $(1+2)^3$
(i) algum aluno de MD
(j) ela e ele
(k) o número x que somado com 1 é par
(l) o triângulo ABC de lados $3, 4$ e 5

Resolução: (a) Constante. Denota um número determinado. (b) Variável. Denota um número indeterminado. (c) Constante. Denota uma pessoa determinada. (d) Variável. Denota uma pessoa indeterminada. (e) Variável. Denota um par ordenado de objetos indeterminados. (f) Constante. Denota uma figura determinada. (g) Variável. Denota um número indeterminado. (h) Constante. Denota um número determinado. (i) Variável. Denota uma pessoa indeterminada. (j) Variável. Denota um par de pessoas indeterminadas. (k) Variável. Denota um número não específico. (l) Constante. Denota uma figura específica.

4. Reescrever as seguintes propriedades como enunciados, por meio de variáveis:

(a) ser aluno
(b) estudar muito
(c) tirar boas notas
(d) ser função
(e) ser contínua
(f) ser derivável
(g) ser círculo
(h) ter centro
(i) ter diâmetro
(j) ser figura
(k) estar insatisfeito
(l) ser aluno matriculado
(m) gostar de bolo ou de sorvete
(n) ficar feliz quando está estudando
(o) estar alerta quando, e somente quando, acordado

Resolução: (a) x é aluno. (b) y estuda muito. (c) z tira boas notas. (d) u é função. (e) v é contínua. (f) w é derivável. (g) x é círculo. (h) y tem centro. (i) z tem diâmetro. (j) u é figura. (k) não (x está satisfeito). (l) (y é aluno) e (y está matriculado). (m) (z gosta de bolo) ou (z gosta de sorvete). (n) se (u estuda), então (u fica feliz). (o) (v está alerta) se, e somente se, (v está acordado).

5. Reescreva cada enunciado abaixo como uma generalização, usando variáveis e conectivos de maneira adequada:

   (a) todos são inteligentes
   (b) todos são indefinidos
   (c) todos são figuras planas
   (d) todos são preguiçosos ou vagabundos
   (e) todas as figuras são triângulos
   (f) para cada um, ter direitos é o mesmo
   (g) que ter deveres

   Resolução: (a) para todo x (x é inteligente). (b) para todo y não (y é definido). (c) para todo z [(z é figura) e (z é plana)]. (d) para todo u [(u é preguiçoso) ou (u é vagabundo)]. (e) para todo v [se (v é figura), então (v é triângulo)]. (f) para todo w [(w tem direitos) se, e somente se, (w tem deveres)].

6. Reescreva cada enunciado abaixo como uma existencialização, usando variáveis e conectivos de maneira adequada:

   (a) existem indiferentes
   (b) há infelizes
   (c) alguns são ricos e poderosos
   (d) há circulares ou quadrangulares
   (e) existem os que ficam felizes quando se
   (f) sentem poderosos
   (g) para ao menos um, ter direitos é o mesmo
   (h) que ter deveres

   Resolução: (a) existe x (x é indiferente). (b) existe y não (y é feliz). (c) existe z [(z é rico) e (z é poderoso)]. (d) existe u [(u é circular) ou (u é quadrangular)]. (e) existe v [se (v se sente poderoso), então (v fica feliz)]. (f) existe w [(w tem direitos) se, e somente se, (w tem deveres)].

7. Determinar os enunciados componentes de cada enunciado abaixo.

   (a) todos gostam de sorvete
   (b) alguém gosta de Romeu
   (c) todos gostam de cinema e pipoca
   (d) existem pensadores radicais
   (e) todos os sapos são verdes
   (f) existem pássaros nadando
   (g) todos os pagantes estão sentados e se divertindo
   (h) existem animais selvagens que estão em cativeiro

8. Determinar os enunciados componentes de cada enunciado: Os enunciados (a) a (f) não possuem ocorrências de quantificadores.

   (a) ele passou
   (b) ela estudou
   (c) ele estudou e ela passou

(d) ela estudou e não passou
(e) ele aprendeu e, por isso, passou
(f) ela não aprendeu, mas, mesmo assim, passou
(g) entre as aranhas, somente as tarântulas e as viúvas-negras são venenosas
(h) todos ou só alguns dos marsupiais têm bolsas e santam
(i) nenhum peixe tem asas a não ser que ele pertença à família dos *exocoetidae*
(j) alguns organismos são cordados e outros são moluscos, mas nenhum deles é ambos, cordado e molusco
(k) animais se comportam normalmente quando não estão sendo vigiados
(l) nenhum pardal constroi um ninho a menos que esteja acasalando

9. Para cada enunciado abaixo, faça o que se pede: (i) Determine seu(s) componente(s). Observe que alguns quantificadores foram escritos de uma forma estilizada. Por isto, quando for necessário, reescreva o enunciado, de modo a tornar a sua estrutura mais aparente. (ii) Baseado na solução do item (i), defina uma legenda para o enunciado.

   (a) ela não vai viajar
   (b) ele e ela são professores
   (c) todo aluno estuda
   (d) alguns alunos não comparecem
   (e) nem todo professor é bem pago
   (f) alguns alunos gostam de MB e não gostam de MD
   (g) todo professor que vai ao campus faz palestra
   (h) há alunos que vão à monitoria mas não prestam atenção
   (i) nem todo professor vai viajar e visitar a campus
   (j) há professores que não se preparam e nem explicam a matéria

10. Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

   (a) todos são covardes
   (b) alguns são corajosos
   (c) todas as mulheres são meigas
   (d) alguns homens são brutos
   (e) todos os quadrados são losangos e retângulos
   (f) alguns triângulos são isósceles e escalenos
   (g) todas as figuras planas têm duas dimensões
   (h) algumas figuras tridimensionais só têm duas dimensões

(i) cada número que eu escolhi é primo

(j) certos números não são primos e nem compostos

11. Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

    (a) todos são jovens e inocentes

    (b) tudo é quadrado ou redondo

    (c) um número é par se, e somente se, é divisível por 2

    (d) existem pulgas ou carrapatos

    (e) alguns, quando coagidos, reagem

    (f) tem quem ajude o próximo se, e somente se, é pago para isto

12. Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

    (a) nem todos são honestos

    (b) não existe aquecimento global

    (c) todos sorriem, mas alguns são tristes

    (d) alguns sobrevivem ou todos os esforços são em vão

    (e) se todos praticam esportes, alguns são campeões

13. Para cada enunciado abaixo, (i) determine uma legenda, (ii) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (iii) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

    (a) existem animais

    (b) existem divisores de zero

    (c) existem animais racionais

    (d) alguns números são maiores do que 100

    (e) existem pássaros que não voam

    (f) há pessoas ou fantasmas

    (g) alguns, se pacientes, conseguem o que querem

    (h) alguns são caros se, e somente se, são raros

    Resolução: (a) Propriedade: *ser animal.* Legenda: $a(x)$: x é animal. Afirma que algum x é animal. Simbolização: $\exists x[a(x)]$. Negação: $\neg\exists x[a(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[a(x)]$. Afirma que todo x não é animal. Reescrita: *todos não são animais.* (b) Propriedade: *ser divisor de zero.* Legenda: $d(x)$: x é divisor de zero. Afirma que algum x é divisor de zero. Simbolização: $\exists x[d(x)]$. Negação: $\neg\exists x[d(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[d(x)]$. Afirma que todo x não é divisor de zero. Reescrita: *todos não são divisores de zero.* (c) Propriedades: *ser animal* e *ser racional* Legenda: $\begin{array}{lcl} a(x) & : & x \text{ é animal} \\ r(x) & : & x \text{ é racional.} \end{array}$ Afirma que algum x é, simultaneamente, animal e racional. Simbolização: $\exists x[a(x) \wedge r(x)]$. Negação: $\neg\exists x[a(x) \wedge r(x)]$ é equivalente a $\forall x\neg[a(x) \wedge r(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg a(x) \vee \neg r(x)]$ é equivalente a $\forall x[a(x) \to \neg r(x)]$.

Afirma que todo x que é animal não é racional. Reescrita: *todos os animais são irracionais.* (d) Propriedades: *ser número e ser maior do que* 100. Legenda: $\begin{array}{lcl} n(x) & : & x \text{ é número} \\ m(x) & : & x \text{ é número maior do que } 100. \end{array}$ Afirma que algum x é, simultaneamente, número e maior do que 100. Simbolização: $\exists x[n(x) \wedge m(x)]$. Negação: $\neg\exists x[n(x) \wedge m(x)]$ é equivalente a $\forall x \neg[n(x) \wedge m(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg n(x) \vee \neg m(x)]$ é equivalente a $\forall x[n(x) \rightarrow \neg m(x)]$. Afirma que todo x que é número não é maior do que 100. Reescrita: *todos os números são menores ou iguais a* 100. (e) Propriedades: *ser pássaro e voar.* Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é pássaro} \\ v(x) & : & x \text{ voa.} \end{array}$ Afirma que algum x é pássaro e não voa. Simbolização: $\exists x[p(x) \wedge \neg v(x)]$. Negação: $\neg\exists x[p(x) \wedge \neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x \neg[p(x) \wedge \neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg p(x) \vee \neg\neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[p(x) \rightarrow \neg\neg v(x)]$ é equivalente a $\forall x[p(x) \rightarrow v(x)]$. Afirma que todo x que é pássaro, voa. Reescrita: *todos os pássaros voam.* (f) Propriedade: *ser pessoa e ser fantasma.* Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é pássaro} \\ f(x) & : & x \text{ é fantasma.} \end{array}$ Afirma que algum x é fantasma. Simbolização: $\exists x[p(x) \vee f(x)]$. Negação: $\neg\exists x(p(x) \vee f(x))$ é equivalente a $\forall x \neg[p(x) \vee f(x)]$ é equivalente a $\forall x[\neg p(x) \wedge \neg f(x)]$. Afirma que todo x não é pessoa e não é fantasma. Reescrita: *todos não são pessoas nem fantasmas.* (g) Propriedades: *ser paciente e conseguir o que quer.* Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é paciente} \\ q(x) & : & x \text{ conseque o que quer.} \end{array}$ Afirma que algum x quando é paciente, consegue o que quer. Reescrita: todos são pacientes mas não conseguem o que querem. (h) Propriedades: *ser caro e ser raro.* Legenda: $\begin{array}{lcl} c(x) & : & x \text{ é caro} \\ r(x) & : & x \text{ é raro.} \end{array}$ Afirma que algum x é caro quando, e somente quando é raro. Simbolização: Simbolização: $\exists x[c(x) \leftrightarrow r(x)]$. Negação: $\neg\exists x[c(x) \leftrightarrow r(x)]$ é equivalente a $\forall x \neg[c(x) \leftrightarrow r(x)]$ é equivalente a $\forall x\langle[c(x) \wedge \neg r(x)] \vee [r(x) \wedge \neg c(x)]\rangle$. Afirma que todo x é caro e não é raro ou, alternativamente, é raro e não é caro. Reescrita: *todos são caros e não são raros, ou são raros e não são caros.*

14. Para cada enunciado abaixo, (i) determine uma legenda, (ii) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (iii) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

    (a) nem todo polígono de quatro lados é um quadrado
    (b) existe um número par e primo que não é o 2
    (c) existem números inteiros positivos que não são pares nem ímpares
    (d) ao menos um triângulo retângulo não tem ângulos agudos
    (e) há elementos que pertencem a A ou que pertencem a B

Resolução: (a) Reescrita: *não (todo polígono de quatro lados é um quadrado).* É uma negação. Negação: *todo polígono de quatro lados é um quadrado.* (b) Propriedades: ser número, ser par, ser primo e ser igual a 2. Legenda: $\begin{array}{lcl} n(x) & : & x \text{ é número} \\ p(x) & : & x \text{ é par} \\ r(x) & : & x \text{ é primo} \\ d(x) & : & x \text{ é igual a 2.} \end{array}$ Afirma que algum x, simultaneamente, é número, é par, é primo e não é igual a 2. Simbolização: $\exists x\langle[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x)\rangle$. Negação: $\neg\exists x\langle[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x)\rangle$ é equivalente a $\forall x \neg\langle[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \wedge \neg d(x)\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle\neg[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \vee \neg\neg d(x)\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \rightarrow \neg\neg d(x)\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle[n(x) \wedge p(x) \wedge r(x)] \rightarrow d(x)\rangle$. Afirma que todo x que é número e par e primo é igual a 2. Reescrita: *todo número par é divisível por 2.* (c) Propriedades: *ser número, ser inteiro, ser positivo,* *ser par e ser ímpar*. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é número} \\ q(x) & : & x \text{ é inteiro} \\ r(x) & : & x \text{ é positivo} \\ s(x) & : & x \text{ é par} \\ t(x) & : & x \text{ é ímpar.} \end{array}$ Simbolização: $\exists x\langle[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)]\rangle$. Negação: $\neg\exists x\langle[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)]\rangle$ é equivalente a $\forall x\neg\langle[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \wedge [\neg s(x) \wedge \neg t(x)]\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle\neg[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee \neg[\neg s(x) \wedge \neg t(x)]\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle\neg[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee \neg\neg[s(x) \vee t(x)]\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle\neg[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \vee [s(x) \vee t(x)]\rangle$ é equivalente a $\forall x\langle[p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)] \rightarrow [s(x) \vee t(x)]\rangle$. Reescrita: todo número inteiro positivo é par ou ímpar. (d) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser rescrito como todo triângulo retângulo tem ângulo agudo. Observe que, de acordo com a prática matemática, o plural "ângulos agudos" não é lido como "tem mais de um ângulo agudo". (e) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser reescrito como todo elemento que pertence a A não pertence a B.

15. Para cada enunciado abaixo, (i) determine uma legenda, (ii) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (iii) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

   (a) todos estão vivos
   (b) todos são imperfeitos
   (c) todos os ímpares são primos
   (d) todos os que estão insatisfeitos são infelizes
   (e) qualquer um tem pai e mãe
   (f) cada quadrado tem quatro lados
   (g) todos estão positivos ou operantes
   (h) cada um é feliz ou não

Resolução: (a) Propriedade: *estar vivo*. Legenda: $v(x) : x$ está vivo. Afirma que todo x está vivo. Simbolização: $\forall x(v(x))$. Negação: $\neg\forall x(v(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(v(x))$. Afirma que existe x que não está vivo. Reescrita: *alguém está morto*. (b) Propriedade: *ser perfeito*. Legenda: $p(x) : x$ é perfeito. Afirma que todo x não é perfeito. Simbolização: $\forall x(\neg p(x))$. Negação: $\neg\forall x(\neg p(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg\neg p(x))$ é equivalente a $\exists x(p(x))$. Afirma que algum x é perfeito. Reescrita: *alguém é perfeito*. (c) Propriedades: *ser ímpar*. Legenda: $\begin{array}{lcl} i(x) & : & x \text{ é ímpar} \\ p(x) & : & x \text{ é par.} \end{array}$ Afirma que todo x que é ímpar, também é primo. Simbolização: $\forall x(i(x) \rightarrow p(x))$. Negação: $\neg\forall x(i(x) \rightarrow p(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(i(x) \rightarrow p(x))$ é equivalente a $\exists x(i(x) \wedge \neg p(x))$. Afirma que existe x que é ímpar e que não é primo. Reescritas: existem ímpares que não são primos, algum par não é primo e há pares que são compostos. (d) Propriedades: *estar satisfeito e ser feliz*. Legenda: $\begin{array}{lcl} s(x) & : & x \text{ está satisfeito} \\ f(x) & : & x \text{ é feliz.} \end{array}$ Afirma que todo x que está satisfeito também está feliz. Simbolização: $\forall x(\neg s(x) \rightarrow \neg f(x))$. Negação: $\neg\forall x(\neg s(x) \rightarrow \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(\neg s(x) \rightarrow \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg s(x) \wedge \neg\neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg s(x) \wedge f(x))$. Afirma que existe x que está insatisfeito, mas está feliz. Reescrita: existe ao menos um insatisfeito feliz. (e) Propriedades: *ter pai e ter mãe*. Legenda: $\begin{array}{lcl} s(x) & : & x \text{ tem pai} \\ f(x) & : & x \text{ tem mãe.} \end{array}$ Afirma que todo x tem pai e tem mãe. Simbolização: $\forall x(p(x) \wedge m(x))$. Negação: $\neg\forall x(p(x) \wedge m(x)))]$ é equivalente a $\exists x\neg(p(x) \wedge m(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg p(x) \vee \neg m(x))$. Afirma que existe x que não tem pai ou não tem mãe. Reescrita: *alguém não tem pai ou não tem mãe*. (f) Propriedades: *ser quadrado e ter quatro lados*. Legenda: $\begin{array}{lcl} q(x) & : & x \text{ é quadrado} \\ l(x) & : & x \text{ tem quatro lados.} \end{array}$ Afirma que todo x é quadrado tem quatro lados. Simbolização: $\forall x(q(x) \rightarrow l(x))$. Negação: $\neg\forall x(q(x) \rightarrow l(x))$ é equivalente a $\exists x\neg(q(x) \rightarrow l(x))$ é equivalente a $\exists x(q(x) \wedge \neg l(x))$. Afirma que existe x que é quadrado e não tem quatro lados. Reescrita: *existe quadrado que não tem quatro lados.* (g) Propriedades: *estar positivo e estar operante*. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ está positivo} \\ o(x) & : & x \text{ está operante.} \end{array}$ Afirma que todo x está positivo ou está operante. Simbolização: $\forall x(p(x) \vee o(x))$. Negação: $\neg\forall x(p(x) \vee o(x))$ é equivalente a $\exists x \neg(p(x) \vee o(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg p(x) \wedge \neg o(x))$. Afirma que existe x que não está positivo e não está operante. Reescrita: *alguém não está nem positivo nem operante.* (h) Propriedade: *ser feliz*. Legenda: $f(x)$: x é feliz. Afirma que todo x é feliz ou não é feliz. Simbolização: $\forall x(f(x) \vee \neg f(x))$. Negação: $\neg\forall x(f(x) \vee \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x \neg(f(x) \vee \neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg f(x) \wedge \neg\neg f(x))$ é equivalente a $\exists x(\neg f(x) \wedge f(x))$. Afirma que existe x que não é feliz e é feliz. Reescrita: *alguém é infeliz e feliz.*

16. Para cada enunciado abaixo, (a) determine uma legenda, (b) simbolize o enunciado, de acordo com a legenda definida, (c) reescreva a negação do enunciado, usando equivalências.

    (a) não existe número racional entre 0 e 1
    (b) todo número ímpar é primo
    (c) todo número inteiro que é múltiplo de 2 e de 3 também é múltiplo de 8
    (d) todo polígono tem três ou quatro lados
    (e) todo número primo ímpar é divisível por 3 e por 5

Resolução: (a) Pode ser reescrito como *não (existe número racional entre* 0 *e* 1*)*. É uma negação. Assim, sua negação é existe número racional entre 0 e 1. (b) Propriedades: *ser número, ser ímpar* e *ser primo*. Legenda: $\begin{array}{lcl} n(x) & : & x \text{ é número} \\ i(x) & : & x \text{ é ímpar} \\ p(x) & : & x \text{ é primo.} \end{array}$ Afirma que todo x que é número é ímpar, também é primo. Simbolização: $\forall x[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x)]$. Negação: $\neg\forall x[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x)]$ é equivalente a $\exists x \neg[(n(x) \wedge i(x)) \to p(x))]$ é equivalente a $\exists x[(n(x) \wedge i(x)) \wedge \neg p(x)]$. Afirma que existe x que é número e ímpar, e não é primo. Reescrita: *existe número ímpar que não é primo, ou seja, existe número ímpar que é composto.* (c) Propriedades: *ser número, ser inteiro, ser múltiplo de* 2*, ser múltiplo de* 3 *e ser múltiplo de* 8. Legenda: $\begin{array}{lcl} p(x) & : & x \text{ é número} \\ q(x) & : & x \text{ é inteiro} \\ r(x) & : & x \text{ é múltiplo de 2} \\ s(x) & : & x \text{ é múltiplo de 3} \\ t(x) & : & x \text{ é múltiplo de 8.} \end{array}$ Simbolização: $\forall x[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$. Observe que pela associatividade do $\wedge$, podemos suprimir parênteses em $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)$. Negação: $\neg\forall x[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$ é equivalente a $\exists x \neg[(p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \to t(x)]$ é equivalente a $\exists x(((p(x) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge s(x)) \wedge \neg t(x))$. Reescita: *existe número inteiro que é múltiplo de* 2 *e de* 3 *mas não é múltiplo de* 8. (d) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser rescrito como: existem polígonos que não têm três e não têm quatro lados. Observe que, de acordo com a prática matemática, "existem polígonos" é lido como "existe ao menos um polígono". (e) Você deve chegar a um enunciado simbolizado que pode ser reescrito como: existe número primo ímpar que não é divisível por 3 ou não é divisível por 5.

17. Simbolize os seguintes enunciados:

    (a) Todos os amigos de Leo gostam de ir à praia, mas não gostam de usar bronzeador.
    (b) Há um dia ensolarado, portanto todos os dias são ensolarados.
    (c) Todos os empregados que não são puxa-sacos são demitidos.

Resposta: (a) Legenda:

$$\begin{array}{lcl} a(x) & : & x \text{ é amigo de Leo} \\ g(x) & : & x \text{ gosta de ir à praia} \\ b(x) & : & x \text{ gosta de usar bronzeador.} \end{array}$$

Simbolização: $\forall x\{a(x) \to [g(x) \wedge \neg b(x)]\}$.

(b) Legenda:

$$\begin{array}{lcl} d(x) & : & x \text{ é dia} \\ e(x) & : & x \text{ é ensolarado.} \end{array}$$

Simbolização: $\exists x[d(x) \wedge e(x)] \to \forall x[d(x) \to e(x)]$.

(c) Legenda:

$$\begin{array}{lcl} e(x) & : & x \text{ é empregado} \\ p(x) & : & x \text{ é puxa-saco} \\ d(x) & : & x \text{ é demitido} \end{array}$$

Simbolização: $\forall x[(e(x) \wedge \neg p(x)) \to d(x)]$.